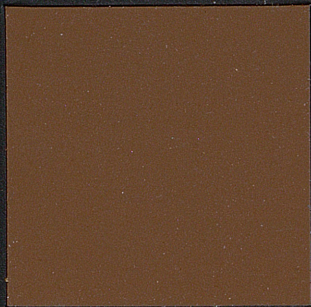
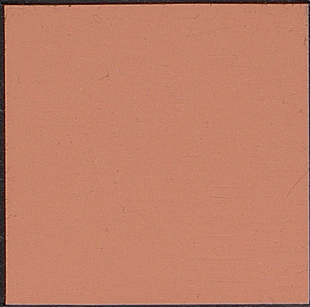
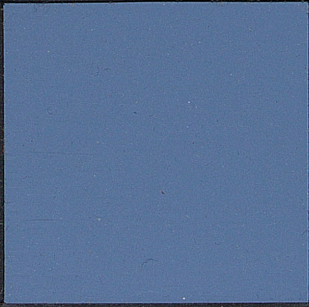
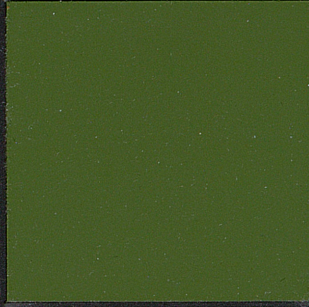
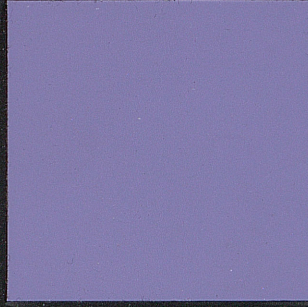
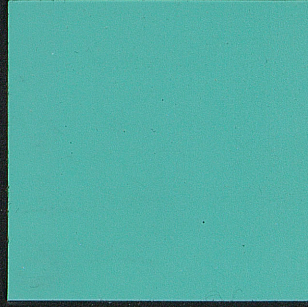
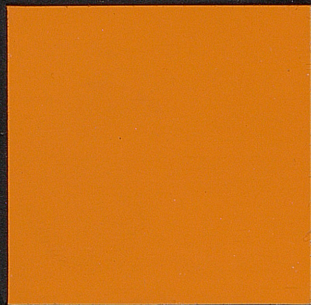
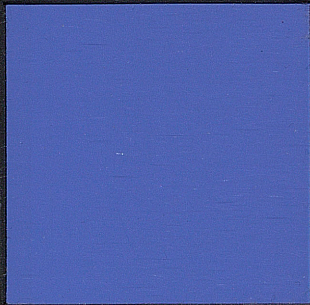
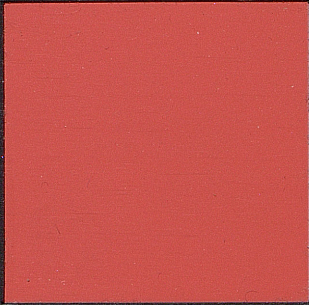
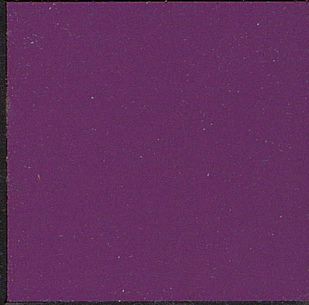
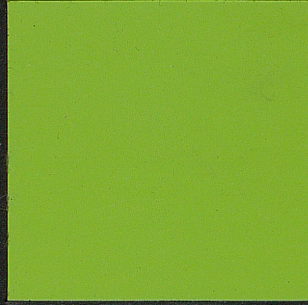
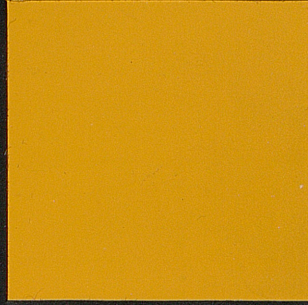
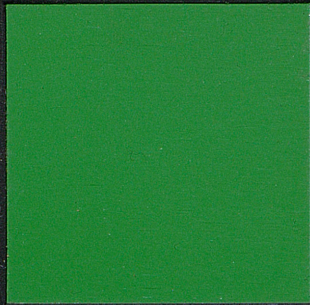
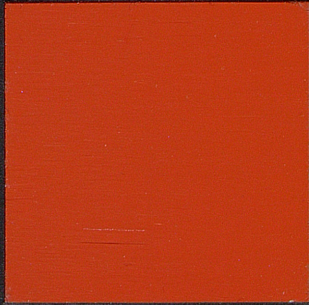
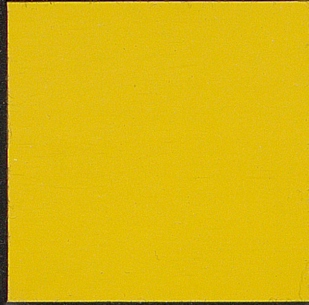
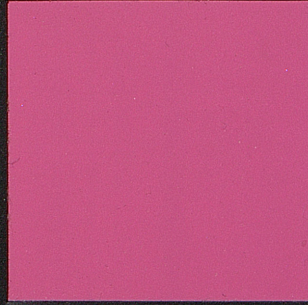
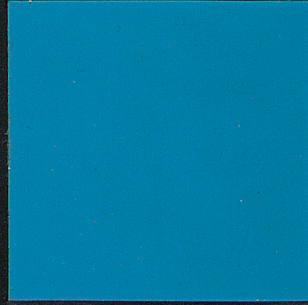
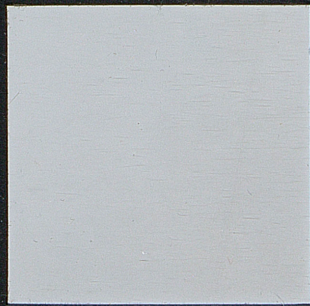
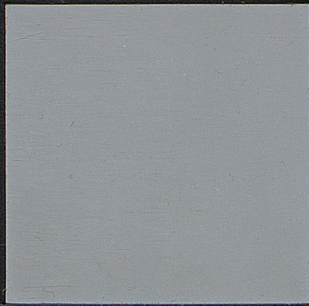
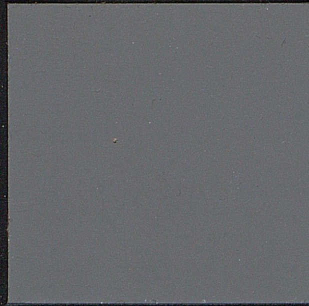
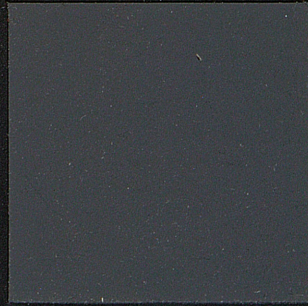
colorchecker CLASSIC


x-rite

mm

Mécanique rationnelle

Cours de M. Appell
à la Faculté des Sciences
1891 – 1892.

2e cahier

Louis Couturat

Cours de Mécanique rationnelle
professé par M. Appell
à la Faculté des Sciences
1891-1892.

II.



Table

Statique des systèmes.

Equilibre des fils (suite.)

On sait que lorsqu'un polygone funiculaire est sollicité par des forces concourantes, sa figure d'équilibre est plane et le moment de la tension par rapport au centre des forces est constant.

Le même théorème est vrai pour un fil flexible et inextensible. Nous allons le démontrer directement.

Partons des 2 équations de l'équilibre:

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y = 0$$

Développons:

$$\frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} + T\frac{d^2x}{ds^2} = -X \qquad \frac{dT}{ds}\frac{dy}{ds} + T\frac{d^2y}{ds^2} = -Y$$

Faisons la combinaison qui donne le moment $(xY - yX)$:

$$\frac{dT}{ds}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) + T\left(x\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2x}{ds^2}\right) = -xY + yX$$

Le 1[er] membre est une dérivée exacte, on peut écrire:

$$\frac{d}{ds}\left[T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)\right] + xY - yX = 0.$$

Or la quantité entre crochets est le moment de T par rapport à l'axe des z; en effet, la tension a pour projections sur les 3 axes:

$$T\frac{dx}{ds}, \quad T\frac{dy}{ds}, \quad T\frac{dz}{ds}.$$

et comme elle est appliquée au p. (x, y, z) son moment par rapport à Oz est: $x.T\frac{dy}{ds} - y.T\frac{dx}{ds} = T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)$

Ainsi la dérivée par rapport à l'arc du moment de la tension par

rapport à un axe est égale et de signe contraire au moment de la force donnée par rapport au même axe. C'est une relation analogue à l'équation : $\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X = 0$

en remplaçant les projections de T et de F par leurs moments.
S'il y a un axe par rapport auquel les moments de toutes les forces données soient nuls, on pourra le prendre pour axe des z; on aura constamment : $xY - yX = 0$ d'où, en intégrant :

$$T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = C^{te}$$

ce qui prouve que le moment de la tension par rapport à cet axe est constant.

Dans le cas particulier où le fil est sollicité par des forces centrales, on pourra prendre le centre des forces pour origine; on appliquera le théorème précédent aux 3 axes, puisque les moments des forces sont nuls par rapport à chacun d'eux; les moments de la tension seront constants :

$$T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = C \qquad T\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) = A \qquad T\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right) = B$$

c.à.d. que le moment de la tension par rapport au centre des forces est const.
Combinons ces 3 équations entre elles, nous obtiendrons :

$$Ax + By + Cz = 0$$

équation d'un plan passant par l'origine; donc la figure d'équilibre est plane. — Prenons maintenant pour plan des xy le plan de cette courbe; on aura d'abord l'équation : $T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = C$

qui exprime que le moment de la tension par rapport au pôle est constant.
Soit F l'intensité de la force rapportée à l'unité de longueur, prise avec le signe + ou − selon qu'elle est répulsive ou attractive.
La force élémentaire qui agit sur ds sera $F ds$.

Faisons la combinaison : $dT = -(Xdx + Ydy)$

en coordonnées polaires r, θ : $X = F\cos\theta = F\frac{x}{r}$ $Y = F\frac{y}{r}$.

$dT = -\frac{F}{r}(xdx + ydy)$ Or $xdx + ydy = rdr$

$$dT = -Fdr$$

La première équation deviendra en coordonnées polaires :

$xdy - ydx = r^2 d\theta$ $Tr^2 d\theta = Cds$.

Pour éliminer T, on la tirera de cette dernière équation et on la portera dans la précédente ; on aura l'équation différentielle de la courbe en coordonnées polaires.

Un cas particulier très fréquent est celui où la force centrale ne dépend que de la distance au centre. Le problème se ramène alors aux quadratures : $F = \varphi(r)$ $dT = -\varphi(r)dr$ $T = -\int\varphi(r)dr + h$.

Il y a une fonction de forces : $\psi(r) = \int\varphi(r)dr$ $T = h - \psi(r)$

On porte alors cette valeur de T dans la 2e équation :

$(h-\psi)r^2 d\theta = Cds$ $(h-\psi)^2 r^4 d\theta^2 = C^2 ds^2 = C^2(dr^2 + r^2 d\theta^2)$

Les variables se séparent : $[(h-\psi)^2 r^2 - C^2] r^2 d\theta^2 = C^2 dr^2$ d'où :

$$d\theta = \pm \frac{Cdr}{r\sqrt{(h-\psi)^2 r^2 - C^2}}$$

d'où l'on tire θ en fonction de r par une quadrature.

On aura une constante d'intégration θ_0, soit 3 constantes h, C, θ_0, ce qui, avec les 2 paramètres qui fixent le plan de la courbe, fait les 5 constantes. On déterminera dans chaque cas ces constantes par les conditions aux limites.

Si, en particulier, la force F est une constante $k \gtrless 0$, on a :

$T = -kr + h$ $\psi = kr$ $d\theta = \pm \frac{Cdr}{r\sqrt{(h-kr)^2 r^2 - C^2}}$

on a alors θ par une intégrale elliptique en fonction de r. Elle se réduit à une intégrale élémentaire si $h = 0$:

$$d\theta = \frac{C\,dr}{r\sqrt{k^2r^4 - C^2}} \qquad \theta = \int \frac{C\,dx}{x\sqrt{x^2 - C^2}} = -\frac{1}{C}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{C}\arccos\frac{C}{kr^2}$$

La figure d'équilibre est dans ce cas une hyperbole équilatère. Comme T est essentiellement positive, si $h = 0$, il faut que $k < 0$, c.à.d. que la force soit attractive ; on voit en effet que la courbe tourne sa convexité vers le point O (origine des asymptotes).

Nous avons jusqu'ici étudié l'équilibre d'un fil libre, sauf à ses 2 extrémités. — Cherchons la figure d'équilibre d'un fil placé sur une surface sur laquelle il peut glisser sans frottement, et soumis à des forces données. — Sur l'élément linéaire ds agit la force donnée $F\,ds$ et la réaction normale de la surface que nous représenterons par $N\,ds$, N étant une quantité finie, d'ailleurs inconnue ; il est soumis en outre aux 2 tensions qui s'exercent à ses extrémités. On peut donc considérer le fil comme libre, soumis aux forces extérieures $F\,ds$, $N\,ds$, dont la résultante en chaque point est $R\,ds$. Soient X, Y, Z les projections de F ; soit $f(x, y, z)$ l'équation de la surface, les projections de N seront :

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

et celles de $R\,ds$:

$$X\,ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\,ds - \quad Y\,ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\,ds \quad Z\,ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\,ds.$$

Les équations de l'équilibre seront alors :

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X\,ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\,ds = 0$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y\,ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\,ds = 0$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z\,ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\,ds = 0$$

auxquelles on joindra :

l'éq. de la surface $f(x,y,z)=0$ et l'identité: $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1.$
On aura ainsi 5 équations pour déterminer x, y, z, T et λ. Cette dernière inconnue, étant auxiliaire, pourra être éliminée d'abord.
Quand l'arc $\underline{s}$ ne figure pas explicitement dans l'expression de la force (X, Y, Z) on élimine immédiatement s au moyen de l'identité comme.
Il se présente ce fait remarquable, que la formule de la tension est la même que si le fil était libre. En effet, on a dans le cas présent:

$$dT=-\left[\left(X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\left(Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy+\left(Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz\right]$$

Or le coefficient de λ ; $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0$
puisque le point est assujetti à rester sur la surface; la réaction normale disparait donc, et on retrouve la formule;

$$dT=-\left[X dx+Y dy+Z dz\right]$$

S'il y a une fonction des forces, on pourra donc calculer la tension en chaque point sans connaître ni la forme de la surface ni la figure d'équilibre: on aura comme pour un fil libre $T=-U+h$.
Considérons en particulier un fil homogène pesant posé sur une surface. Soit p le poids de l'unité de longueur; prenons pour Oz une verticale dirigée vers le haut; les projections de la force sont: $X=0$, $Y=0$, $Z=-p$.

$$dT=p\,dz \qquad T=p(z-z_0)$$

et cela a lieu quelle que soit la surface. Cette formule peut s'interpréter géométriquement: menons le plan horizontal: $z=z_0$
la tension en un point quelconque M du fil est égale à la hauteur de ce point au-dessus de ce plan fixe, multipliée par p. Donc on peut, sans détruire l'équilibre, replier le fil sur une poulie au point M, et le laisser pendre jusqu'au plan, la tension en M étant égale au poids de la partie pendante.

Dans le cas d'une sphère, on pourra calculer la projection de la figure d'équilibre d'un fil pesant sur le plan horizontal en coordonnées polaires ; on déterminera ainsi la chaînette sphérique.

Nous avons déjà dit que lorsqu'un fil flexible et inextensible est tendu sur une surface et qu'aucune force extérieure n'agit sur lui, sa tension est constante ; en effet, $F=0$, $dT=0$, $T=$ const.

Le fil se dispose suivant une ligne géodésique de la surface. En effet, la seule force qui agisse sur l'élément linéaire ds est la réaction normale ; or on sait que la force est située dans le plan osculateur de la courbe d'équilibre ; donc le plan osculateur en chaque point de cette courbe contient la normale à la surface en ce point, ce qui est la définition des lignes géodésiques.

Quand on cherche sur une surface le plus court chemin entre 2 points donnés de cette surface, on trouve une des lignes géodésiques passant par ces 2 points. — Il faut remarquer : 1° que toute ligne géodésique n'est pas un plus court chemin : par exemple, sur la sphère, le plus court chemin entre 2 points est le plus petit arc du grand cercle de ces 2 points, à l'exclusion du plus grand ; à moins que les 2 points ne soient diamétralement opposés, auquel cas il y a une infinité de lignes géodésiques qui sont toutes des plus courts chemins, étant égales ; 2° que le plus court chemin doit être entendu au sens relatif comme ligne plus courte que les lignes infiniment voisines ; de sorte qu'il peut y avoir plusieurs plus courts chemins entre 2 points, et même une infinité. — Par exemple, sur un cylindre de révolution, il y a une infinité de lignes géodésiques passant par 2 points donnés : ce sont toutes des hélices, car elles doivent devenir des droites quand on développe le cylindre sur un plan ; et toutes sont des plus courts chemins entre les 2 points, car si on tend un fil entre ces 2 points après lui avoir fait

faire n tours sur le cylindre, il se disposera suivant l'hélice qui fait n spires entre les 2 points, et on ne pourra pas passer d'une manière continue de l'hélice de n spires à l'hélice de $(n-1)$ spires ou à celle de $(n+1)$ spires.

— Le problème de la figure d'équilibre d'un fil se ramène, quand il y a une fonction des forces, à la recherche du maximum et du minimum d'une intégrale curviligne fort importante, car on la retrouve dans la théorie de la moindre action, dans le problème des brachistochrones et dans l'étude de la réfraction.

Soit une fonction : $\varphi(x, y, z)$

admettant des dérivées premières et secondes dans une région de l'espace. Proposons-nous le problème suivant : Étant donnés 2 points fixes A, A' dans cette région de l'espace, parmi toutes les courbes qui les joignent trouver celle qui rend maximum ou minimum l'intégrale

$$I = \int_A^{A'} \varphi(x, y, z)\, ds$$

prise le long de cette courbe.

Pour chaque courbe tracée de A en A', l'intégrale I sera bien déterminée, car sur chaque élément ds de cette courbe la fonction φ aura une valeur finie et unique ; on pourra exprimer x, y, z en fonction de l'arc s, et on aura une fonction uniforme de l'arc à intégrer entre s_0 et s', valeurs correspondant aux points A et A'.

Si φ est constamment positive dans la région considérée, l'intégrale aura nécessairement un minimum : en effet, de toutes les valeurs positives qu'elle prendra suivant toutes les courbes possibles allant de A en A', il y en ~~aura~~ une plus petite que toutes les autres. De même, si φ est constamment négative, l'intégrale aura sûrement un maximum.

Si φ est une constante : $\varphi = 1$, par exemple, l'intégrale se réduit à : $\int_A^{A'} ds = l$ longueur totale de la courbe AA'.
Son minimum correspond alors à la droite AA'.

Pour trouver le maximum ou le minimum de cette intégrale I dans le cas général, nous emploierons le calcul des variations.

Soit une certaine courbe C réalisant un minimum de l'intégrale, ce qui veut dire que l'intégrale sera plus grande sur toute autre courbe infiniment voisine et ayant mêmes extrémités A, A'.

Exprimons les coordonnées x, y, z de la courbe C en fonction d'un paramètre u, qui varie de u_0 à u' quand le p. (x, y, z) va de A à A'; soient x', y', z' les dérivées de $x y z$ par rapport à u ;

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\, du = R\, du \qquad \frac{\partial R}{\partial x'} = \frac{x'}{R} = \frac{dx}{ds}.$$

L'intégrale devient :

$$I = \int_{u_0}^{u'} \varphi(x, y, z)\, R\, du$$

φ étant devenue fonction de u, ainsi que R.

Prenons une courbe C_1 infiniment voisine de C et allant aussi de A à A'. Pour l'exprimer analytiquement, imaginons 3 fonctions arbitraires de u, soient ξ, η, ζ, s'annulant pour $u = u_0$, $u = u'$; et ayant des dérivées dans l'intervalle (u_0, u'), et posons :

$$x_1 = x + \varepsilon\xi \qquad y_1 = y + \varepsilon\eta \qquad z_1 = z + \varepsilon\zeta$$

ε étant une constante infiniment petite, positive ou négative.
Quand u varie de u_0 à u', le point (x_1, y_1, z_1) décrit la courbe C_1 demandée, qui dépend des fonctions arbitraires ξ, η, ζ et de la constante ε.
Calculons l'intégrale prise le long de la courbe C_1 ;

$$I_1 = \int_{u_0}^{u'} \varphi(x_1, y_1, z_1) R_1 \, du \qquad R_1 = \sqrt{(x'+\varepsilon\xi')^2 + (y'+\varepsilon\eta')^2 + (z'+\varepsilon\zeta')^2}$$

Cette nouvelle intégrale est une fonction de l'arbitraire ε, et elle doit être minimum pour : $\varepsilon = 0$: $\quad I_1 \geq I$.

Développons donc I_1 suivant les puissances croissantes de ε. On a par la formule de Taylor :

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = \varphi(x, y, z) + \varepsilon\left(\xi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \varepsilon^2 P + \dots$$

$$R_1 = R + \varepsilon\left(\xi' \frac{\partial R}{\partial x'} + \eta' \frac{\partial R}{\partial y'} + \zeta' \frac{\partial R}{\partial z'}\right) + \varepsilon^2 Q + \dots$$

$$= R + \varepsilon\left(\xi' \frac{dx}{ds} + \eta' \frac{dy}{ds} + \zeta' \frac{dz}{ds}\right) + \varepsilon^2 Q + \dots$$

Multiplions :

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) R_1 = \varphi R + \varepsilon\left[R\left(\xi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \varphi\left(\xi' \frac{dx}{ds} + \eta' \frac{dy}{ds} + \zeta' \frac{dz}{ds}\right)\right] + \varepsilon^2 K + \dots$$

Donc en intégrant par rapport à u :

$$I_1 = I + \varepsilon \int_{u_0}^{u'} \left(\xi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) ds + \varepsilon \int_{u_0}^{u'} \varphi\left(\xi' \frac{dx}{ds} + \eta' \frac{dy}{ds} + \zeta' \frac{dz}{ds}\right) du + \varepsilon^2 \int \dots$$

On peut faire disparaître ξ', η', ζ' de la 2e intégrale en intégrant par parties :

$$\int_{u_0}^{u'} \varphi \frac{dx}{ds} \xi' \, du = \left(\xi \varphi \frac{dx}{ds}\right)_{u_0}^{u'} - \int_{u_0}^{u'} \xi \, d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right)$$ De même pour η', ζ'.

Or la partie intégrée est nulle par hypothèse, puisque $\xi = 0$ pour $u = u_0$, $u = u'$ et que φ et $\frac{dx}{ds}$ restent finis pour ces valeurs ; donc :

$$I_1 = I + \varepsilon \int_{u_0}^{u'} \left(\xi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) ds - \varepsilon \int_{u_0}^{u'} \left[\xi \, d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right) + \eta \, d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right) + \zeta \, d\left(\varphi \frac{dz}{ds}\right)\right] + \varepsilon^2 \dots$$

$$I_1 - I = \varepsilon \int_{u_0} \left\{\xi\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} ds - d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right)\right] + \eta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} ds - d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right)\right] + \zeta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} ds - d\left(\varphi \frac{dz}{ds}\right)\right]\right\} + \varepsilon^2 H + \dots$$

Telle est la variation de l'intégrale quand on passe de la courbe C à la courbe infiniment voisine C_1. Comme ε est infiniment petit, le 2e membre a le signe de son 1er terme, si du moins l'intégrale n'est pas nulle. Or on veut que, quels que soient ξ, η, ζ et la constante ε,
$I_1 - I > 0$ donc le coefficient de ε doit être nul ; ce coefficient est d'ailleurs la dérivée de I_1 par rapport à ε, qui s'annule quand I_1 atteint son minimum. Aussi l'intégrale doit être nulle quelles que soient les fonctions arbitraires ξ, η, ζ entre les limites u_0 et u'. Or cela ne peut avoir lieu que si les coefficients de ξ, η, ζ dans l'élément différentiel sont ~~identiq~~ nuls séparément : car autrement, on pourrait déterminer les fonctions ξ, η, ζ de sorte qu'elles aient le même signe que leurs coefficients, et rendre l'élément différentiel constamment positif. On a donc les 3 équations :

$$d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = 0 \qquad d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} ds = 0 \qquad d\left(\varphi \frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} ds = 0$$

Ces équations sont analogues à celles de la figure d'équilibre d'un fil flexible et inextensible soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel V :

$$d\left(T \frac{dx}{ds}\right) + \frac{\partial V}{\partial x} ds = 0 \qquad d\left(T \frac{dy}{ds}\right) + \frac{\partial V}{\partial y} ds = 0 \qquad d\left(T \frac{dz}{ds}\right) + \frac{\partial V}{\partial z} ds = 0$$

Or quand il y a une fonction de forces V, on peut calculer T par la formule :

$$dT = -dV \qquad \text{d'où :} \qquad T = -(V + h)$$

On voit que la courbe qui réalise le minimum (ou le maximum) de l'intégrale I est la figure d'équilibre d'un fil soumis à des forces dérivant du potentiel :

$$V = -\varphi \qquad \text{et où la tension serait :} \qquad T = \varphi.$$

La valeur de la tension doit donc être particularisée ; on aurait en général

$$T = \varphi(x, y, z) - h$$

et ici on doit prendre $h = 0$.

Toutes les propriétés démontrées pour la figure d'équilibre d'un fil s'appliquent aux courbes C qui réalisent le maximum ou le minimum de l'intégrale.
La courbe C est plane quand les forces sont concourantes ou parallèles.
Les 3 équations trouvées se réduisent à 2, car si l'on effectue sur elles la combinaison qui donne dT (en multipliant la 1e par $\frac{dx}{ds}$, la 2e par $\frac{dy}{ds}$, la 3e par $\frac{dz}{ds}$, et en remarquant que $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$) on trouve l'identité: $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$.
Cela vient de ce qu'on a déterminé la valeur de la tension à l'avance.
Les intégrales générales de ce système, c.à.d les équations de la courbe C contiendront 4 constantes: en effet, on a 2 équations différentielles du 2e ordre qui définissent par exemple y et z en fonction de x; on aura les équations:

$$y=\varphi(x, a_1, a_2, a_3, a_4)$$
$$z=\chi(x, a_1, a_2, a_3, a_4)$$

qui déterminent la courbe C en termes finis (si l'on peut effectuer les intégrations.) Il n'y a que 4 constantes, parce que la 5e est déjà fixée: c'est $h=0$.
On déterminera ces 4 constantes en écrivant que la courbe C passe par les points A et A', ce qui donnera 4 équations de condition.
On aura en les résolvant un ou plusieurs systèmes de valeurs pour a_1, a_2, a_3, a_4: c'est parmi ces solutions que se trouvent celles qui réalisent le maximum ou le minimum de l'intégrale; tout ce qu'on sait, c'est que les courbes correspondantes annulent la 1e dérivée de l'intégrale par rapport à ε; pour savoir si elles donnent effectivement un maximum ou un minimum, il faudra considérer la 2e dérivée.

Pour avoir la figure d'équilibre d'un fil tendu à ses 2 extrémités A, A' sans être soumis à aucune force, on devra faire : $\varphi = 1$, car : $F = 0$. On sait que le minimum correspond à la droite AA'. Les équations donnent dans ce cas : $d\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0$ $d\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$ $d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$.

d'où, en intégrant : $\frac{dx}{ds} = C$ $\frac{dy}{ds} = C'$ $\frac{dz}{ds} = C''$

On en conclut : $\frac{dy}{dx} = a_1$ $\frac{dz}{dx} = a_3$

$$\begin{cases} y = a_1 x + a_2 \\ z = a_3 x + a_4 \end{cases}$$

équations finies d'une droite. On déterminera les 4 paramètres en écrivant que cette droite passe par A et A'.

Les courbes C ont, comme on voit, une grande analogie avec les droites, qui en sont un cas particulier. Cette analogie se manifeste dans toutes leurs propriétés, dont nous ~~ment~~ citerons seulement la suivante.

<u>Théorème de MM. Tait et Thomson</u>. Soit C une de ces courbes ayant pour extrémités A, A' ; soit I l'intégrale prise sur C de A à A'. Prenons une courbe infiniment voisine C_1, ayant des extrémités différentes A_1, A'_1 ; soit I_1 la valeur de l'intégrale prise sur C_1 de A_1 à A'_1. La courbe C_1 aura encore pour coordonnées courantes :

$$x_1 = x + \varepsilon\xi \qquad y_1 = y + \varepsilon\eta \qquad z_1 = z + \varepsilon\zeta$$

seulement ξ, η, ζ ne s'annulent plus aux extrémités. Soient les coordonnées : $A(a, b, c)$ $A_1(a_1, b_1, c_1)$ $A'(a' b' c')$ $A'_1(a'_1, b'_1, c'_1)$; on aura, pour $u = u_0$:

$$\varepsilon\xi = a_1 - a \qquad \varepsilon\eta = b_1 - b \qquad \varepsilon\zeta = c_1 - c$$

et pour $u = u'$:

$$\varepsilon\xi = a'_1 - a' \qquad \varepsilon\eta = b'_1 - b' \qquad \varepsilon\zeta = c'_1 - c'$$

On calculera encore la variation $(I_1 - I)$ de l'intégrale de la même manière; seulement, dans l'intégration par parties, la partie intégrée ne s'annule plus, puisque ξ, η, ζ ne s'annulent pas aux limites; on aura:

$$I_1 - I = \delta I = \varepsilon\left[\xi\varphi\frac{dx}{ds} + \eta\varphi\frac{dy}{ds} + \zeta\varphi\frac{dz}{ds}\right]_{u_0}^{u'}$$

$$+\varepsilon\int_{u_0}^{u'}\left\{\xi\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}ds - d\left(\varphi\frac{dx}{ds}\right)\right] + \eta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}ds - d\left(\varphi\frac{dy}{ds}\right)\right] + \zeta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}ds - d\left(\varphi\frac{dz}{ds}\right)\right]\right. + \varepsilon^2 \dots$$

Mais nous avons supposé que la courbe C est une de celles qui annulent les coefficients de ξ, η, ζ dans l'intégrale, et par suite l'intégrale elle-même; il reste donc la partie intégrée:

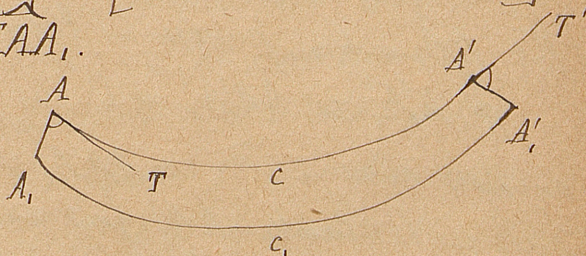
$$\delta I = \varphi\left[\varepsilon\xi\frac{dx}{ds} + \varepsilon\eta\frac{dy}{ds} + \varepsilon\zeta\frac{dz}{ds}\right]_{u_0}^{u'}$$

Effectuons la différence indiquée entre les valeurs de cette expression pour u_0 et u'. Soient φ_0, φ' les valeurs correspondantes de φ; $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sont les cosinus directeurs des tangentes dirigées dans le sens des arcs croissants; soient: $\alpha\ \beta\ \gamma$ en A, $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ en A'.

$$\delta I = \varphi'\left[(a_1'-a')\alpha' + (b_1'-b')\beta' + (c_1'-c')\gamma'\right] - \varphi_0\left[(a_1-a)\alpha + (b_1-b)\beta + (c_1-c)\gamma\right]$$

$$= \varphi' . A'A_1' . \cos\widehat{T'A'A_1'} - \varphi_0 . AA_1 . \cos\widehat{TAA_1}.$$

On retrouve une formule élémentaire pour la ligne droite en faisant $\varphi = 1$. On peut rendre cette formule symétrique en changeant le signe d'un des cosinus.



IAA_1 est l'angle de l'arc $A'A$ avec la droite AA_1 que nous écrirons $A'AA_1$; mais $I'A'A'_1$ est le supplément de l'angle de l'arc AA' avec la droite $A'A'_1$, donc $\cos I'A'A'_1 = -\cos AA'A'_1$

$$\delta I = -\varphi'. A'A'_1 . \cos AA'A'_1 - \varphi_0 . AA_1 . \cos A'AA_1$$

Telle est la quantité qui doit s'annuler pour que I soit un maximum ou un minimum de l'intégrale.

Problème. Étant donné une surface S, un point A hors de cette surface, trouver, parmi toutes les courbes menées de A à S, celle qui rend l'intégrale $\int \varphi(x,y,z)\,ds$ maximum ou minimum

Dans le cas particulier où $\varphi = 1$, cette courbe est la plus courte ou la plus grande distance de A à S, c.à.d. une des normales menées par le point A à la surface S.

La solution, dans le cas général, est une courbe normale à la surface; en effet, soit AA' une solution, réalisant le minimum de l'intégrale; c'est une courbe C puisqu'elle réalise le minimum entre les 2 points fixes A, A'. Mais si l'on passe de la courbe AA' à la courbe infiniment voisine AA'_1, on doit avoir :

$$-\varphi'. A'A'_1 . \cos AA'A'_1 + \varphi_0 . AA_1 . \cos A'AA_1 = 0$$

Or $AA_1 = 0$, puisque les 2 courbes sont issues du point A ; donc

$$\varphi'. A'A'_1 . \cos AA'A'_1 = 0$$ et comme $\varphi' \gtrless 0$, $A'A'_1 \gtrless 0$,

on doit avoir : $\cos AA'A'_1 = 0$

c.à.d. que la courbe AA' fait un angle droit avec un déplacement quelconque du p. A' sur la surface : donc elle est normale à la surface.

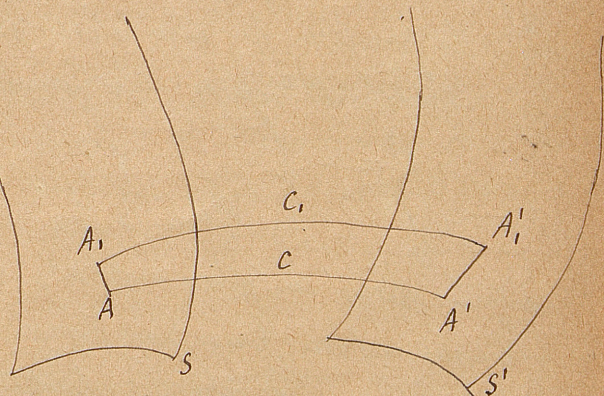
De même, si l'on considère toutes les courbes menées d'un point

de l'espace à une courbe donnée, celle qui réalise le maximum ou le minimum de l'intégrale est normale à cette courbe.

Si l'on considère toutes les courbes menées entre 2 surfaces données, celle qui réalise le maximum ou le minimum de l'intégrale est normale aux 2 surfaces.

On peut généraliser la théorie des surfaces parallèles de la manière suivante:

Soit une surface S; en un point A de cette surface menons une courbe C normale à cette surface; elle sera entièrement déterminée, car les intégrales générales contiennent 4 constantes: or il faut 2 paramètres pour fixer le point A, et 2 pour fixer la direction de la courbe en A. Prenons sur cette courbe un arc AA' tel qu'on ait:



$$\int_A^{A'} \varphi(x, y, z)\, ds = I = const^e.$$

Le lieu de A' est une nouvelle surface S' qui est aussi normale aux courbes C. En effet, la variation δI est nulle de l'une à l'autre, par ex. de $C(AA')$ à $C_1(A_1A'_1)$: or le 2e terme est nul car: $\cos A'AA_1 = 0$ par construction; donc le 1er l'est aussi, et l'on doit avoir:

$\cos AA'A'_1 = 0$ La courbe C est normale à S'.

Quand on fait: $\varphi = 1$, les courbes C sont des droites, ce sont des normales communes à S et S', et ces 2 surfaces sont parallèles au sens ordinaire: toutes les longueurs des normales sont égales.

Tous ces théorèmes peuvent s'appliquer, par un simple changement d'énoncé, à des fils sollicités par des forces dérivant d'un potentiel $-\varphi$, soumis à des tensions égales à φ, et dont les extrémités glisseraient sans frottement (de façon que le fil dût être normal) sur des surfaces ou des courbes données.

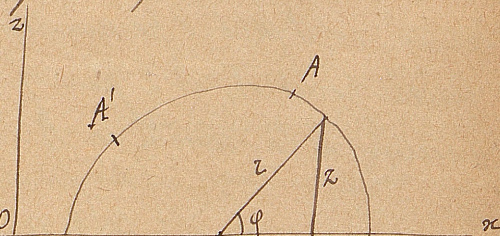
Traitons en particulier le cas simple où : $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{z}$.
Supposons que toutes les courbes considérées restent au-dessus du plan des xy : la fonction φ sera alors finie, continue et constamment positive dans toute cette région. La fonction des forces sera alors :

$$V = -\frac{1}{z} \qquad \text{d'où :} \quad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = \frac{1}{z^2}.$$

$T = \frac{1}{z}$ Ainsi la force est verticale ; donc la courbe cherchée est située dans un plan vertical, déterminé par les points d'attache A, A'.

Prenons ce plan pour plan des xz ; l'équation en y devient une identité ; les autres sont : $d\left(\frac{1}{z}\frac{dx}{ds}\right) = 0$

$$d\left(\frac{1}{z}\frac{dz}{ds}\right) - \frac{1}{z^2}\,ds = 0$$



Ces 2 équations se réduisent à une seule ; prenons la plus simple la 1re.

$$d\left(\frac{1}{z}\frac{dx}{ds}\right) = 0 \qquad \frac{1}{z}\frac{dx}{ds} = a \qquad a\,dx = z\,ds = z\sqrt{dx^2+dz^2}$$

$$(a^2 - z^2)\,dx^2 = z^2 dz^2 \qquad dx = \pm\frac{z\,dz}{\sqrt{a^2-z^2}} \qquad x - b = \pm\sqrt{a^2-z^2}$$

d'où l'équation finie : $(x-b)^2 + z^2 = a^2$

équation d'un cercle ayant son centre sur l'axe des x ; $x = b$, $z = 0$.
Ainsi si l'on veut trouver la courbe C qui joint 2 points AA' situés au-dessus du plan des xy, il suffira de mener par AA' l'arc de cercle

qui rencontre normalement le plan des xy. Comme cet arc est entièrement déterminé par cette condition, la solution est unique; elle a toujours lieu, la construction étant toujours possible.

Pour trouver la signification de l'intégrale $\int \frac{ds}{z}$ le long d'un arc de cercle ayant son centre dans le plan des xy, considérons le rayon r de cet arc et φ l'angle qu'il fait avec le plan des xy:

$$\int \frac{ds}{z} = \int \frac{r\,d\varphi}{r\sin\varphi} = \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log tg \frac{\varphi}{2}.$$

Dans la géométrie non-euclidienne de Lobatchefsky, on appelle droites les courbes que nous venons de définir (arcs de cercle ayant leur centre sur le plan des xy.) Cette géométrie diffère de la géométrie euclidienne en ce que les droites sont définies par l'intégrale

$\int \frac{ds}{z}$ et non plus par l'intégrale $\int ds$.

On déduit de cette définition des théorèmes analogues à ceux de la géométrie ordinaire, mais absolument différents; par exemple on appelle plan (figure engendrée par une droite passant par un point fixe et s'appuyant sur une droite fixe) toute sphère ayant son centre sur le plan des xy; et ainsi de suite.

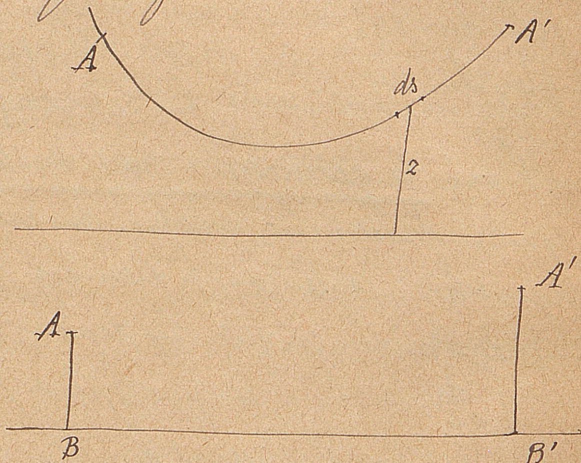
On peut encore dire que cette géométrie est celle où les fils tendus, étant soumis à la force $\frac{1}{z^2}$, prendraient la forme d'arcs de cercle ayant leur centre dans le plan des xy, et où ces fils joueraient le rôle que jouent les droites dans la géométrie euclidienne.

— Appliquons encore les formules générales au cas particulier simple:

$\varphi = pz$. p constante. $V = -pz$ $T = pz$.

On a pour la force: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -p$.

Toute courbe C est dans ce cas la figure d'équilibre d'un fil homogène pesant, p étant le poids de l'unité de longueur : c'est donc une chaînette située dans un plan vertical. Prenons ce plan pour plan des xz ; la chaînette aura pour directrice l'axe des x, car on a annulé $(h=0)$ la constante d'intégration de I, de sorte que la tension se trouve proportionnelle à z du point, ce qui définit l'axe horizontal comme directrice.



Ces courbes donnent la solution du problème de géométrie suivant : Parmi toutes les courbes situées dans le plan des xz et joignant 2 points AA' situés au-dessus de Ox, trouver celle qui en tournant autour de Ox engendre la surface minimum.

La surface engendrée par l'élément ds étant la surface latérale d'un tronc de cône : $2\pi z\,ds$, la surface totale est représentée par l'intégrale :

$$2\pi \int_A^{A'} z\,ds$$

où : $\varphi = z \qquad p = 1.$

On trouve ainsi une chaînette ayant pour directrice l'axe des x :

$$z = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right)$$

On détermine les 2 constantes x_0 et a en écrivant que la chaînette passe par les 2 points donnés.

Géométriquement, on doit toujours avoir une solution ; pourtant, la chaînette n'existe plus si les points A et A' sont trop éloignés l'un de l'autre relativement à leur distance à l'axe des x.

La solution se compose dans ce cas des 2 ordonnées de A et A',

et du segment d'axe qu'elles comprennent. En effet, $d\left(z\frac{dx}{ds}\right)=0$ est l'équation différentielle de la courbe, d'où l'on tire :

$z\frac{dx}{ds}=a$ Si $a \gtrless 0$, on intègre et on trouve une chaînette ; mais si $a=0$, il n'est plus possible d'intégrer. On a alors, soit :

$z=0$, soit : $\frac{dx}{ds}=0$ ou : $x=\text{const}$.

Puisque la courbe doit partir de A, on commence par avoir $x=\text{const.}$ qui donne l'ordonnée AB ; puis $z=0$, on suit l'axe BB' ; enfin, comme la courbe rejoint A', on a encore : $x=\text{const.}$ qui donne B'A'. La surface minimum se réduit aux 2 cercles engendrés par AB, A'B'.

Pour savoir le rôle que l'intégrale curviligne : $\int \varphi(x,y,z)\,ds$ et la recherche de ses maxima et minima jouent dans la théorie de la réfraction, consulter : O. Bonnet, ap. Nouvelles Annales des sciences mathématiques, 1889.

<u>Définition</u>. Soit une force F appliquée à un point mobile M ; supposons que ce point subisse un déplacement quelconque infiniment petit. On appelle <u>travail élémentaire</u> de la force F correspondant au déplacement MM' le produit : $F.\,MM'.\cos \widehat{FMM'}$

On peut l'écrire : $MM'(F.\cos \widehat{FMM'})$

ce qui donne l'énoncé suivant : le travail élémentaire est le produit du déplacement par la projection de la force sur ce déplacement. D'où l'on conclut immédiatement la proposition suivante :

Si plusieurs forces sont appliquées à un même point M, le travail élémentaire de leur résultante pour un déplacement MM' est égal à la somme des travaux élémentaires des composantes pour le même déplacement.

En effet, la projection de la résultante sur une direction quelconque est égale à la somme des projections des composantes.

Le produit peut encore s'écrire : $F(MM'.\cos FMM')$

ce qui s'énonce :

Le travail élémentaire est le produit de la force par la projection du déplacement sur la direction de la force. D'où le théorème :

Si le déplacement MM' est la somme géométrique de plusieurs déplacements, le travail élémentaire de la force suivant MM' est la somme des travaux élémentaires de la même force suivant tous les déplacements composants.

On voit que le travail élémentaire d'une force est nul quand un des 3 facteurs s'annule, c.à.d. quand la force est nulle, quand le déplacement est nul, ou quand la force est perpendiculaire au déplacement.

Comme F et MM' sont essentiellement positifs, le travail élémentaire a le signe de $\cos FMM'$: il est positif quand l'angle FMM' est aigu, négatif quand il est obtus. Dans le 1er cas, il est appelé moteur ; dans le 2e cas, il est dit résistant.

On peut introduire la vitesse dans la formule du travail, car MM' étant un infiniment petit, $v = \frac{ds}{dt} = \frac{MM'}{dt}$

D'ailleurs la vitesse est dirigée suivant MM' ; donc le travail élémentaire est représenté par : $F.v.\cos(F,v)\,dt$.

Le temps n'intervient qu'en apparence dans cette formule ; dt marque que le produit est infiniment petit.

Cherchons l'expression analytique du travail élémentaire ; soient X, Y, Z les projections de F ; dx, dy, dz, celles de MM' (ds). Les cosinus directeurs de F seront : $\frac{X}{F}, \frac{Y}{F}, \frac{Z}{F}$

ceux de MM' seront : $\frac{dx}{MM'}$, $\frac{dy}{MM'}$, $\frac{dz}{MM'}$.

Donc : $\cos(F, MM') = \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{F. MM'}$

Le travail élémentaire a pour expression : $Xdx + Ydy + Zdz$
qui correspond au déplacement infiniment petit (dx, dy, dz).

Définissons maintenant le travail total d'une force pour un déplacement fini. Supposons que le mobile aille de M_0 en M_1 suivant la courbe C, de l'instant t_0 à l'instant t_1. Soit F une des forces qui agissent sur lui pendant ce laps de temps ; le travail total de cette force pendant le mouvement est la somme des travaux élémentaires de l'instant t_0 à l'instant t_1. Or pour un élément linéaire infiniment petit MM' de la courbe C, le travail élémentaire est : $Xdx + Ydy + Zdz$.
Le travail total sera l'intégrale de t_0 à t_1 du travail élémentaire :

$$\mathcal{T} = \int_{t_0}^{t_1} (Xdx + Ydy + Zdz)$$

Dans le cas le plus général, la force F dépend à la fois de la position du mobile, de sa vitesse et du temps :

$$X = \varphi\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right)$$

$$Y = \psi\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right)$$

$$Z = \varpi\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right)$$

D'autre part, le mouvement du point M allant de M_0 en M_1 dans l'intervalle de temps $(t_1 - t_0)$ est défini par les équations :

$$x = f_1(t) \qquad y = f_2(t) \qquad z = f_3(t)$$

d'où : $dx = f_1'(t)\,dt \qquad dy = f_2'(t)\,dt \qquad dz = f_3'(t)\,dt$.

On portera ces valeurs de x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ dans les expressions de X, Y, Z, puis les valeurs de X, Y, Z, dx, dy, dz dans l'intégrale, et on aura :

$$\mathcal{C} = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t)\, dt \qquad \text{quadrature en } t.$$

Pour obtenir cette intégrale sous forme de quadrature, on voit qu'il faut en général connaître non seulement la forme de la courbe C c.à.d. la trajectoire du mobile (x, y, z) mais encore son mouvement sur la courbe, c.à.d. sa vitesse $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$.

Le calcul précédent se simplifie quand la force ne dépend que de la position du mobile ; il suffit alors de connaître la courbe décrite par le point ; on a par hypothèse : $X = \varphi(x, y, z)$ $Y = \psi(x, y, z)$ $Z = \varpi(x, y, z)$

La trajectoire étant donnée, on peut exprimer ses coordonnées courantes en fonction d'un paramètre : $x = f_1(q)$ $y = f_2(q)$ $z = f_3(q)$ le point (x, y, z) décrivant l'arc $M_0 M_1$ quand q varie de q_0 à q_1.

On aura alors la quadrature :

$$\mathcal{C} = \int_{q_0}^{q_1} \Psi(q)\, dq$$

intégrale purement géométrique, qui ne dépend plus de la vitesse.

Le cas le plus simple pour le calcul du travail est celui où le travail total dépend seulement des 2 points extrêmes M_0, M_1, et non de la courbe suivie par le point mobile M de l'un à l'autre : dans ce cas, on n'a plus besoin de connaître la courbe. On va prouver que pour que cela ait lieu, il faut et il suffit qu'il existe une fonction des forces. Nous allons traiter la question suivante :

Quelle doit être l'expression de X, Y, Z, pour que le travail total soit indépendant du chemin parcouru de M_0 à M_1, au moins dans une certaine région de l'espace ?

Nous allons chercher les conditions nécessaires en traitant un cas tout particulier. Supposons que le mobile parte de $M_1(x, y, z)$, qu'on lui donne un déplacement infiniment petit M_1M' parallèle à Ox puis un déplacement infiniment petit $M'M''$ parallèle à Oz; soient dx, dz les longueurs de ces 2 déplacements. Supposons d'autre part qu'on le déplace, dans un ordre inverse, de dz, puis de dx, par le chemin M_1M_2M'' qui aboutit à la même position finale. Le travail total doit être le même pour ces 2 chemins particuliers $M_1M'M''$, M_1M_2M''. Or:

sur M_1M': $Xdx = \varphi(x, y, z)dx$ sur $M'M''$: $Zdz = \varpi(x+dx, y, z)dz$

Sur M_1M_2: $Z_1dz = \varpi(x, y, z)dz$ sur M_2M'': $Xdx = \varphi(x, y, z+dz)dx$

$$\varphi(x, y, z)dx + \varpi(x+dx, y, z)dz = \varpi(x, y, z)dz + \varphi(x, y, z+dz)dx$$

Développons φ et ϖ par la formule de Taylor:

$$\varphi(x, y, z+dz) = \varphi(x, y, z) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \dots\dots$$

$$\varpi(x+dx, y, z) = \varpi(x, y, z) + \frac{\partial\varpi}{\partial x}dx + \dots\dots$$

On doit avoir l'égalité:

$$\frac{\partial\varpi}{\partial x}dxdz + \dots\dots\dots\dots = \frac{\partial\varphi}{\partial z}dxdz + \dots\dots\dots$$

Les termes de même ordre dans chaque développement devant être égaux, on a séparément: $\frac{\partial\varpi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

C'est une des conditions nécessaires; on aura donc, par symétrie:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z_1}{\partial y}$$

Telles sont les conditions nécessaires. Elles sont aussi suffisantes; car elles

expriment que les forces dérivent d'un potentiel $-V(x, y, z)$:

$$Xdx + Ydy + Zdz = dV.$$

et on a alors : $$\mathcal{T} = \int_{M_0}^{M_1} (Xdx + Ydy + Zdz) = V_1 - V_0$$

V_0 et V_1 étant les valeurs de la fonction de forces pour M_0 et M_1. On voit que le travail total est égal à la variation de la fonction de forces de M_0 à M_1 ; il est donc indépendant de la courbe parcourue par le point mobile entre M_0 et M_1. Les conditions peuvent d'ailleurs s'écrire : $X = \frac{\partial V}{\partial x}$ $Y = \frac{\partial V}{\partial y}$ $Z = \frac{\partial V}{\partial z}$.

Si $V(x, y, z)$ est une fonction uniforme de x, y, z, V_0 et V_1 n'ont qu'une valeur bien déterminée ; alors le travail total a aussi une valeur unique et bien déterminée.

Si V est une fonction à déterminations multiples, le théorème n'est plus absolument vrai, et il y a lieu d'introduire cette restriction : tant que la courbe suivie ne sort pas d'une certaine région de l'espace. En effet, l'on doit suivre par continuité une même détermination d'un bout à l'autre de la courbe $M_0 M_1$; mais il se peut qu'en partant d'une même valeur V_0 on obtienne en M_1 différentes valeurs V_1 en suivant des chemins différents.

Prenons pour exemple la fonction :

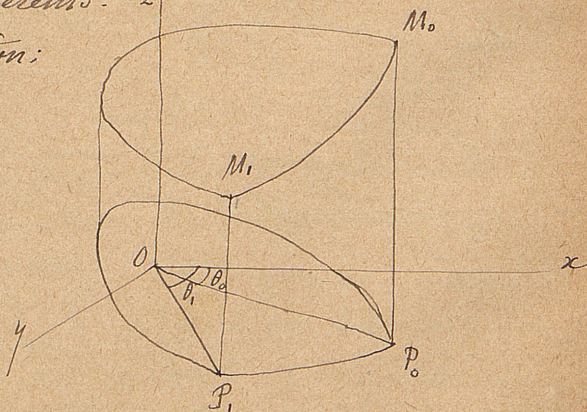
$$V = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Projetons M en P sur le plan des xy :

Soit θ l'angle polaire POx ;

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

d'où : $$V = \theta \pm K\pi.$$



Quand le point M va de M_0 en M_1 suivant une certaine courbe, le point P va de P_0 en P_1 suivant une courbe

déterminée dans le plan des xy : on pourra suivre par continuité la même détermination de V, de θ_0 à θ_1 par exemple. Mais si M va de M_0 en M_1 en tournant autour de Oz, P tourne autour de O pour aller de P_0 en P_1 : le rayon vecteur tournant autour de l'origine ne décrit plus l'angle $(\theta_1 - \theta_0)$, mais l'angle $(\theta_1 + 2\pi - \theta_0)$ c.à.d. l'angle précédent augmenté de 2π ; on trouve donc une autre détermination de V_1, et conséquemment de C. En général, si la courbe suivie par le p. M fait k tours autour de Oz, l'angle θ_1, et par suite V_1, se trouvera augmenté de $2k\pi$. Il faut donc distinguer une infinité de catégories de courbes ; le travail sera le même suivant toutes les courbes d'une même catégorie, faisant le même nombre de tours autour de Oz. En particulier, pour toutes les courbes contenues dans une région de l'espace ne contenant pas Oz, la valeur du travail sera bien déterminée, et égale à $(\theta_1 - \theta_0)$.

On appelle surfaces de niveau les surfaces ayant pour équation :

$$V(x, y, z) = C^{te}$$

Par chaque point de l'espace passe évidemment une surface de niveau. En chaque point M, la force est normale à la surface de niveau qui y passe, car ses projections sont : $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$.

De plus, la force est dirigée du côté où V va en croissant.

Pour le démontrer, cherchons l'expression de la composante de F suivant une demi-droite Mx' parallèle à l'axe des x ; on sait que :

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = \lim \frac{V' - V}{MM'}$$

M' étant un point infiniment voisin de M sur Mx', et V' la valeur de V en ce point M'.



Mais la direction Ox étant arbitraire, pour trouver la composante de F suivant une demi-droite quelconque MD il suffit de prendre un point M' infiniment voisin de M sur cette droite, et de calculer:

$$\lim \frac{V'-V}{MM'} = F_D$$

qu'on appelle dérivée de la fonction V suivant la demi-droite MD.

Cela posé, cherchons la composante de F suivant la normale à la surface de niveau en M; cette composante est égale à F, puisque nous savons déjà que F a cette direction. Menons la normale MN dans le sens de V croissant; il s'agit de savoir quel est le signe de F, si la force est dirigée dans le sens MN ou dans le sens contraire. La composante de F suivant MN sera: $\lim \frac{V'-V}{MM'}$

or cette limite est positive, car M' étant sur MN, $V'-V>0$.

Donc la force est dirigée dans le sens MN; de plus, elle est égale à la dérivée de V suivant la normale dans le sens de V croissant, ce qui s'écrit symboliquement: $F = \frac{dV}{dn}$.

En chaque point d'une même surface de niveau, la force varie en raison inverse de la distance de cette surface à la surface infiniment voisine.

Soit M un point de la surface considérée $V=C$; menons la normale MN dans le sens de V croissant; prenons la surface infiniment voisine:

$$V' = C + \Delta C \qquad \Delta C > 0$$

Cette surface coupe MN en un p^t^ M' infiniment voisin de M; on a:

$$F = \lim \frac{V'-V}{MM'} = \frac{\Delta C}{MM'}$$

ΔC étant constant, F est en raison inverse de MM', normale commune aux 2 surfaces infiniment voisines V et V'.

Nous allons appliquer ces conclusions à divers exemples.

Traitons d'abord le cas général d'un mobile M sollicité par une force constamment normale à la surface fixe S. Convenons de désigner par F la valeur algébrique de la force, comptée négativement ou positivement selon que la surface attire ou repousse le point M. Cherchons la valeur du travail élémentaire pour le déplacement MM'.



Soient MP, M'P' les normales; p, p' leurs longueurs: $p' = p + dp$.
Soient (x, y, z) les coordonnées de M, (a, b, c) celles de P; on a:

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

$$dp = \frac{(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz - (x-a)da - (y-b)db - (z-c)dc}{p}$$

Or: $(x-a)da + (y-b)db + (z-c)dc = 0$

car $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$ sont les paramètres directeurs de MP, et da, db, dc les cosinus directeurs de PP'; or MP et PP' sont perpendiculaires. Donc

$$dp = \frac{(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz}{p}$$

D'autre part: $X = F\frac{x-a}{p}$ $\quad Y = F\frac{y-b}{p}$ $\quad Z = F\frac{z-c}{p}$

$$d\mathcal{T} = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{F}{p}\left[(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz\right] = F\,dp.$$

Géométriquement, le travail élémentaire est le produit de F par la projection de MM' sur M'P', soit M'Q. Or MQ est parallèle à PP', donc on a à des infiniment petits près du 2e ordre: $QP' = MP$

et: $M'Q = M'P' - MP = dp$.

Supposons maintenant qu'en outre la force dépende uniquement de la distance de M à la surface en restant constamment normale à cette surface : $F = \varphi(p)$ $\qquad F\,dp = \varphi(p)\,dp$

On a V par une quadrature : $V = \int \varphi(p)\,dp = \Phi(p)$.

Les surfaces de niveau sont alors parallèles à la surface fixe S ; car V ne dépendant que de p pour que V soit constante, il faut et il suffit que p le soit. Les surfaces : $p = C^{te}$ $\quad \Phi(p) = C^{te}$ sont les mêmes ; mais la force n'est pas la même dans les 2 cas. En effet, ces 2 cas reviennent à : $V = C^{te}$ $\quad f(V) = C^{te}$

Or les projections de la force sont respectivement dans chaque cas :

$$\frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{et :} \quad f'(V)\frac{\partial V}{\partial x},\ f'(V)\frac{\partial V}{\partial y},\ f'(V)\frac{\partial V}{\partial z}.$$

la loi de force n'est donc pas la même.

Dans le cas particulier où la surface donnée S est un plan, les surfaces de niveau sont des plans parallèles à ce plan.

Dans le cas où la surface donnée est une sphère infiniment petite de centre O, on a des forces centrales fonctions de la distance du p. M au p. fixe O. Il y a donc fonction de forces dans ce cas.

$$d\,\mathcal{C} = F\,dr = \varphi(r)\,dr \qquad \mathcal{C} = \int \varphi(r)\,dr + C$$

Les surfaces de niveau sont alors : $\varphi(r) = C^{te}$ ou $r = C^{te}$, c.à.d. des sphères concentriques ayant O pour centre.

Dans le cas où la surface donnée est un cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon infiniment petit, toutes les forces sont normales à l'axe Oz ; il y a fonction de forces si les forces sont ~~propor~~ fonction de la distance du point M à cet axe. Les surfaces de niveau sont des cylindres de révolution ayant pour axe Oz.

Théorème. S'il existe une fonction de forces pour 2 lois de forces séparées, il en existe encore une si l'on fait agir ensemble les 2 systèmes de forces.

On a par hypothèse pour les forces F_1, F_2 :

$$X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz = dV_1 \qquad X_2 dx + Y_2 dy + Z_2 dz = dV_2$$

Si on les fait agir simultanément, les projections de leur résultante F seront : $X_1 + X_2$, $Y_1 + Y_2$, $Z_1 + Z_2$.

Le travail élémentaire de F aura pour expression :

$$X dx + Y dy + Z dz = dV_1 + dV_2 = d(V_1 + V_2)$$

c.à.d. que la force F dérive d'une fonction de forces V égale à la somme des 2 fonctions de forces V_1 et V_2.

Le même théorème s'applique évidemment à un nombre quelconque de forces ; ainsi il existera une fonction de forces pour un point mobile attiré ou repoussé par un nombre quelconque de surfaces, de droites et de points en fonction de ses distances à ces points, droites et surfaces.

Toute la statique se résume dans le principe des vitesses virtuelles.

Définition. Soit un point matériel M sollicité par une force F ; on imagine qu'on lui imprime un déplacement infiniment petit MM' ; on l'appelle déplacement virtuel pour le distinguer du déplacement réel. Ses projections s'écrivent δx, δy, δz pour les distinguer des projections : dx, dy, dz du déplacement réel. Un point matériel est susceptible d'une infinité de déplacements virtuels, puisqu'un tel déplacement est seulement imaginé, par conséquent arbitraire ; tandis que son déplacement

réel est unique et bien déterminé.

On appelle vitesse virtuelle la grandeur géométrique (vecteur) obtenue en portant sur la direction du déplacement virtuel MM' la longueur $\frac{MM'}{dt}$. Le laps de temps infiniment petit dt doit être le même pour tous les points d'un même système, de sorte que ce facteur s'élimine en général, et que les vitesses virtuelles se réduisent aux déplacements virtuels: aussi le temps ne joue-t-il aucun rôle dans les formules des vitesses virtuelles, non plus que dans celles du travail élémentaire.

On appelle travail virtuel d'une force correspondant à un déplacement virtuel MM' le travail élémentaire de cette force suivant MM':
$$F.MM'.\cos \widehat{FMM'} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$
ou, v étant la vitesse virtuelle: $F.v.\cos(F,v)\,dt$.

On peut appliquer au travail virtuel tous les théorèmes démontrés pour le travail élémentaire.

Nous allons d'abord étudier certains cas particuliers d'équilibre en leur appliquant la considération des travaux virtuels.

Soit M un point matériel entièrement libre, sollicité par des forces données ayant une résultante $F(X,Y,Z)$. Si on lui imprime le déplacement virtuel MM', (dx, dy, dz) la somme des travaux virtuels des forces données sera: $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$

Pour que le point soit en équilibre, il faut et il suffit que pour tous les déplacements possibles la somme des travaux virtuels soit nulle. En effet, si le point est en équilibre, c'est que: $F=0$, $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, donc le travail virtuel est nul. Réciproquement, si pour un déplacement quelconque le travail virtuel est nul, il faut que les coefficients de

dx, dy, dz soient nuls : $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, donc $F=0$.
le point sera en équilibre.

Soit un point M mobile sans frottement sur une surface fixe S, ayant pour équation :
$$f(x,y,z)=0$$
et sollicité par des forces données ayant pour résultante $F(X,Y,Z)$. Le point est assujetti à une liaison qu'exprime l'équation :
$$f(x,y,z)=0$$
dite équation de liaison.

On distingue en général les déplacements compatibles et les déplacements incompatibles avec les liaisons, et on ne considère que les premiers. Parmi tous les déplacements possibles du p^t^ M, ceux-là sont compatibles avec la liaison qui ont lieu sur la surface S, c.à.d. qui satisfont l'équation de liaison. – On sait que pour que le point M soit en équilibre, il faut et il suffit que la force soit normale à la surface ou nulle. On va prouver que cette condition est identique à celle-ci : – que pour tous les déplacements compatibles avec la liaison le travail virtuel de la force soit nul : $F.MM'.\cos \widehat{FMM'}=0$.

Cette condition est nécessaire, car si le point est en équilibre, la force est nulle ou perpendiculaire au déplacement virtuel MM' compatible ; $F=0$ ou : $\cos \widehat{FMM'}=0$. Le travail virtuel est donc nul.
Elle est suffisante, car si pour tout déplacement virtuel sur la surface S on a : $F.MM'.\cos \widehat{FMM'}=0$
il faut ou bien que : $F=0$, ou bien que : $\cos \widehat{FMM'}=0$
c.à.d. que la force soit nulle ou normale à la surface.

On retrouve sans peine les équations de l'équilibre en partant de cette nouvelle condition. Le travail virtuel doit être nul
$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0$$
pour tout déplacement compatible avec la liaison : $f(x,y,z)=0$, c.à.d. que dx, dy, dz sont liés entre

eux par l'équation de condition : $\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0$
car, sur la surface S, la variation δf est évidemment nulle d'un point à l'autre. Les 3 variations δx, δy, δz étant soumises à cette relation, on ne peut prendre arbitrairement que 2 d'entre elles, par exemple δy, δz ; alors δx sera déterminée en fonction linéaire des 2 autres. On pourra porter cette valeur de δx dans l'expression du travail virtuel, et on aura l'équation : $A\,\delta y + B\,\delta z = 0$
comme elle doit être vérifiée pour les valeurs arbitraires de δy, δz, on doit avoir séparément : $A = 0$, $B = 0$.
On peut procéder autrement et obtenir des formules symétriques par la méthode des multiplicateurs indéterminés de Lagrange ; multiplions tous les termes de la 2e équation par λ et ajoutons-la à la 1re

$$\left(X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y + \left(Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z = 0$$

Cette nouvelle équation doit être satisfaite quels que soient δy, δz et λ. Choisissons λ de manière à annuler le coefficient de δx.

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Le reste du 1er membre doit être nul pour toutes valeurs attribuées à δy, δz, donc les coefficients de δy, δz doivent être nuls :

$$Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Nous retrouvons ainsi les 3 équations de l'équilibre du point, que nous avions obtenues en considérant la réaction normale de la surface. Elles expriment qu'il y a équilibre entre la force donnée F et la réaction normale indéterminée λ qui est la force de liaison.
On peut aussi exprimer la surface S au moyen de 2 paramètres :

$$x = \varphi(q_1, q_2) \qquad y = \psi(q_1, q_2) \qquad z = \varpi(q_1, q_2)$$

Pour avoir un déplacement du p. M sur la surface, il suffit de donner aux 2 paramètres des accroissements arbitraires δq_1, δq_2 ; les accroissements correspondants des coordonnées seront :

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\delta q_2 \qquad \delta y = \frac{\partial \psi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2}\delta q_2 \qquad \delta z = \frac{\partial \varpi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varpi}{\partial q_2}\delta q_2$$

L'expression du travail virtuel devient alors : $Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2$

en posant : $Q_1 = X\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + Y\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + Z\frac{\partial \varpi}{\partial q_1}$ $\qquad Q_2 = X\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + Y\frac{\partial \psi}{\partial q_2} + Z\frac{\partial \varpi}{\partial q_2}$

Pour que le travail virtuel soit nul quels que soient les accroissements arbitraires $\delta q_1\ \delta q_2$, il faut qu'on ait séparément :

$$Q_1 = 0 \qquad\qquad Q_2 = 0$$

équations de l'équilibre indépendantes de la réaction normale

Remarque. Que le point M soit ou ne soit pas en équilibre, la force de liaison est constamment normale à la surface, puisqu'il n'y a pas de frottement. Donc, dans tout déplacement virtuel compatible avec la liaison, le travail de la force de liaison est nul.

Des considérations analogues s'appliquent à un point M mobile sur une courbe ; supposons-la définie comme l'intersection des 2 surfaces :

$$f_1(x, y, z) = 0 \qquad\qquad f_2(x, y, z) = 0$$

Le point n'est capable que d'un seul déplacement compatible avec les liaisons : c'est le déplacement sur la courbe, affecté d'un signe différent suivant qu'il se fait dans un sens ou dans l'autre. Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la force soit normale à la courbe (ou nulle) c.à.d que le travail virtuel de la force soit nul pour l'unique déplacement compatible avec les liaisons : $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$

Ici les accroissements δx, δy, δz ne sont pas indépendants, ils sont liés par 2 équations de condition résultant des équations de liaison :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z}\delta z = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z}\delta z = 0$$

Ainsi un seul d'entre eux δz par exemple, est arbitraire, δx et δy se trouvant déterminés linéairement en fonction de δz. On pourra porter ces valeurs de δx, δy dans l'expression du travail virtuel, et égaler à 0 le coefficient de δz, resté seul. Nous emploierons encore ici les multiplicateurs de Lagrange; nous multiplierons la 2e éq. par λ, la 3e par μ; la somme des 3 équations devra être nulle quels que soient δz, λ, μ. On disposera de λ et de μ de manière à annuler les coefficients de δx, δy;

$$X + \lambda\frac{\partial f_1}{\partial x} + \mu\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

$$Y + \lambda\frac{\partial f_1}{\partial y} + \mu\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$$

2 équations qui déterminent λ et μ; le coefficient de δz, resté seul, devra être nul quel que soit δz:

$$Z + \lambda\frac{\partial f_1}{\partial z} + \mu\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$$

On retrouve ainsi les équations déduites de la considération de la réaction normale: c'est un vecteur N résultant de 2 vecteurs λ et μ portés respectivement sur les normales en M aux 2 surfaces f_1 et f_2. Les équations expriment que la force donnée F fait équilibre à cette réaction normale dont les composantes restent indéterminées.

Remarquons encore ici que la réaction normale étant toujours perpendiculaire à la direction du déplacement du point, son travail virtuel est constamment nul, quel que soit l'état du point.

On est ainsi conduit à énoncer ce principe général: Lemme:

Dans un système assujetti à des liaisons sans frottement, pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons, la somme des travaux virtuels des forces de liaison est nulle, quel que soit l'état du système.

Nous allons maintenant vérifier ce principe dans le cas des liaisons

les plus simples et les plus générales.

Considérons d'abord 2 points M, M₁ assujettis à rester à une distance invariable l'un de l'autre ; on sait que ce genre de liaison constitue tous les corps solides. En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, ces 2 points exercent l'un sur l'autre 2 forces égales et directement opposées F, F_1. On peut les considérer comme liés par une tige rigide inextensible et sans masse, s'opposant par conséquent à leur rapprochement comme à leur éloignement.

Supposons qu'on imprime aux 2 points M, M_1 un déplacement quelconque qui les transporte en M', M'_1. Les projections de F_1 sont :

$$F_1 \frac{x_1 - x}{r}, \quad F_1 \frac{y_1 - y}{r}, \quad F_1 \frac{z_1 - z}{r} \qquad r = \overline{MM_1}.$$

On donne d'ailleurs à F_1 le signe + ou le signe − selon que les 2 points se repoussent ou s'attirent. Le travail virtuel de F_1 pour le déplacement $M_1M'_1$ est :

$$\frac{F_1}{r}\left[(x_1 - x)\delta x_1 + (y_1 - y)\delta y_1 + (z_1 - z)\delta z_1\right]$$

De même, le travail virtuel de F pour le déplacement MM' est :

$$\frac{F}{r}\left[(x - x_1)\delta x + (y - y_1)\delta y + (z - z_1)\delta z\right]$$

D'ailleurs $F = F_1$, puisqu'on a pris leurs projections en signe contraire ; donc la somme des travaux virtuels des forces de liaison est :

$$\frac{F}{r}\left[(x_1 - x)(\delta x_1 - \delta x) + (y_1 - y)(\delta y_1 - \delta y) + (z_1 - z)(\delta z_1 - \delta z)\right]$$

Or : $\quad r^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$

d'où : $\quad r\delta r = (x_1 - x)(\delta x_1 - \delta x) + (y_1 - y)(\delta y_1 - \delta y) + (z_1 - z)(\delta z_1 - \delta z)$

On a donc pour la somme des travaux virtuels : $\quad F\delta r$

quel que soit le déplacement virtuel. Mais dans tout déplacement compatible avec la liaison, on a : $\delta r = 0 \qquad M'M'_1 = MM_1$

Donc la somme des travaux virtuels des forces de liaison doit être nulle.

Remarque. Nous avons fait intervenir plus haut une tige sans masse, dans un système qui peut être en mouvement ; nous n'avons par là modifié en rien son état, en vertu du théorème suivant :

Lorsqu'un corps est sans masse, les forces qui lui sont appliquées doivent se faire équilibre, quel que soit son état.

En effet, soit un point de masse $\underline{m}$ en mouvement, et soumis à des forces (X, Y, Z) ; les équations du mouvement sont :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Si la masse est infiniment petite, comme l'accélération est toujours finie, ΣX, ΣY, ΣZ doivent être infiniment petites. Si enfin :

$m = 0$, on doit avoir : $\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad \Sigma Z = 0$

équations qui expriment que les forces qui sont appliquées à ce point se font équilibre. Le raisonnement s'étend à un système de points sans masse, c.à.d. à un corps sans masse.

Dans le cas d'un fil sans masse, supposé inextensible, il exerce sur les 2 points M et M_1 qu'il relie les tractions T' et T_1 ; à leur tour, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction ils exercent sur le fil des tensions respectivement égales et opposées aux tractions, T' et T'_1 ; or, en vertu du théorème précédent, on a toujours :

$T' = T'_1$; donc on a aussi : $T = T_1$.

Ce que nous venons de dire pour la liaison invariable de 2 points pouvant se répéter pour un nombre quelconque de points invariablement liés entre eux, c.à.d. pour un système solide, on peut énoncer la proposition générale suivante :

Dans un corps solide quelconque, pour tout déplacement d'ensemble de ce corps, la somme des travaux virtuels des forces de liaison est nulle, quel que soit l'état de ce corps.

Examinons maintenant les diverses liaisons qui peuvent exister entre différents corps solides, et en premier lieu, les liaisons des corps solides du système mobile considéré avec les corps solides fixes.

Soit un corps solide du système assujetti à avoir un point O fixe. Tous les déplacements compatibles avec cette liaison consistent à tourner autour du p. O. Ce point fixe exerce sur le corps une réaction dirigée dans un sens quelconque. Dans tout déplacement compatible avec la liaison, le travail de cette force de liaison est nul, puisque son point d'application O reste immobile.

On verrait de même que la somme des travaux des réactions d'un axe fixe sur un corps assujetti à tourner autour de lui est constamment nulle.

Soit maintenant un corps solide A assujetti à glisser sans frottement sur une surface fixe; soit M un des points de contact. La force de liaison est la réaction normale de la surface sur le p. M; dans tout déplacement compatible avec la liaison, c.à.d. quand M glisse sur la surface, le travail de la force de liaison est nul: $\cos FMM' = 0$.

Soit enfin un corps solide A assujetti à rouler sans glissement sur la surface fixe S. Définissons d'abord ce que nous entendrons par roulement sans glissement.

Définition. Soit M le point du corps mobile qui se trouve en contact à un instant donné avec la surface fixe; on dit que le corps roule sans glisser sur la surface si la vitesse du point M est nulle à cet instant. — On peut réaliser cette espèce de liaison, dans un plan, par un engrenage infiniment petit, ou encore par un fil enroulé sur les 2 courbes et tendu entre elles en passant constamment par le point de contact.



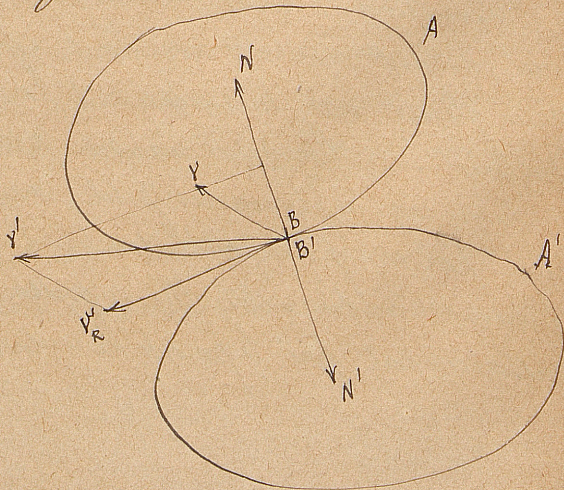
Dans tout déplacement compatible avec la liaison, la vitesse du point de contact instantané sera nulle ; or la force de liaison est appliquée en ce point dans une direction inconnue d'ailleurs ; donc le travail de cette force sera nul ; $F v \cos(F, v)\delta t = 0$ car $v = 0$.

Passons aux liaisons des corps du système mobile entre eux : elles sont des mêmes espèces que les liaisons des corps mobile avec les corps fixes.

Deux corps mobiles peuvent être articulés l'un à l'autre par un point. Les forces de liaison sont alors les 2 réactions des 2 corps l'un sur l'autre en ce point ; ces 2 forces sont égales et opposées ; donc dans tout déplacement virtuel, la somme de leurs travaux sera nulle, car les cosinus des angles qu'elles font avec le déplacement sont égaux et de signe contraire.

Les mêmes conclusions s'appliquent à deux corps mobiles qui auraient 2 points communs, c.à.d. seraient liés l'un à l'autre par un axe.

Considérons maintenant 2 corps du système terminés par les surfaces A, A' assujetties à glisser l'une sur l'autre sans frottement. Ce cas comprend comme cas particuliers ceux où l'un des corps ou tous les deux seraient réduits à une surface, à une courbe ou même à un point. Les déplacements compatibles avec les liaisons sont ceux où les 2 corps restent en contact. Soient B, B' les points de chacun d'eux qui se trouvent en contact à un instant ; les forces de liaison sont les 2 réactions normales BN, B'N', égales et opposées (puisqu'il n'y a pas de frottement.) Soient v, v' les vitesses de B, B' dans un déplacement virtuel quelconque des 2 corps ; elles seront en général différentes. Soient v_n, v'_n, leurs projections respectives sur BN, B'N', prises avec un signe



La somme des travaux virtuels des forces de liaison est :

$$N v_n \delta t + N' v'_{n'} \delta t = N \delta t (v_n + v'_{n'}) = N \delta t (v_n - v'_n)$$

car la projection de v' sur BN' est égale et opposée à celle sur BN du même vecteur. On va prouver géométriquement que : $v_n - v'_n = 0$,
c.à.d. que les 2 vitesses ont mêmes projections sur la normale en BB'.
Pour cela, considérons le déplacement relatif de A' par rapport à A, en considérant A comme fixe. Dans ce mouvement, la vitesse relative v'_R du point B' par rapport au p. B est tangente à la surface A, donc perpendiculaire à la normale BN. Or la vitesse d'entraînement est la vitesse absolue du point B ; on a donc par le théorème du mouvement relatif du point B' :

$$(v') = (v'_R) + (v)$$

Les projections sur un axe quelconque, par exemple sur BN, doivent être égales ; on a donc :

$$v'_n = v_n$$

la projection de v'_R sur la normale étant nulle. — Ainsi le travail des forces de liaison est nul dans ce cas.

Considérons enfin 2 surfaces du système mobile assujetties à rouler sans glisser l'une sur l'autre. Nous avons défini plus haut ce genre de liaison ; soient A, A' les surfaces, B, B' leur point de contact instantané dans chacune d'elles. Les forces de liaison sont 2 réactions Q, Q' égales et opposées, ayant d'ailleurs une direction quelconque. La somme des travaux virtuels de ces réactions sera, en appelant v_q, $v'_{q'}$ les projections des vitesses respectives des p. B et B' sur Q et Q', et en remarquant que : $v'_{q'} = -v'_q$:

$$Q v_q \delta t + Q' v'_{q'} \delta t = Q (v_q - v'_q) \delta t.$$

On va démontrer que les vitesses des 2 points B, B' sont égales. En effet, dans le mouvement relatif de A' par rapport à A supposé fixe, la vitesse relative du p. B' est nulle, puisqu'il y a roulement sans glissement ;

donc la vitesse absolue de B' est égale à sa vitesse d'entraînement, c.à.d. à la vitesse absolue de B : $v' = v$ d'où : $\mathcal{V}'_q = \mathcal{V}_q$.

Ainsi la somme des travaux virtuels des forces de liaison est encore nulle dans tout déplacement compatible avec les liaisons.

Or, dans tous les systèmes imaginables, les liaisons sont toujours des combinaisons des liaisons simples que nous venons d'étudier. Par exemple, considérons 2 points M, M' liés par une chaîne inextensible qui glisse sans frottement sur une surface fixe S : la liaison des points M, M' se compose des liaisons des éléments linéaires de la chaîne, qui constituent autant de tiges solides infiniment petites auxquelles le principe s'applique ; il s'applique également au glissement de chacune d'elles sur la surface ; donc la somme des travaux virtuels des forces de liaison (tensions de la chaîne et réactions de la surface) est toujours nulle.



Le lemme étant ainsi établi, on peut démontrer le principe des vitesses virtuelles. Soit un système de points $M_1\ M_2 \ldots\ldots M_n$ soumis à des forces données, et assujettis à certaines liaisons sans frottement : le principe s'énonce :

Pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que pour tout déplacement compatible avec les liaisons la somme des travaux virtuels des <u>forces données</u> soit nulle.

La condition est nécessaire ; car on peut considérer un des points, M_1 par exemple, comme libre, mais soumis aux forces données et aux forces de liaison ; puisqu'il est en équilibre, toutes ces forces se font équilibre sur ce point ; donc dans un déplacement virtuel <u>quelconque</u>

la somme de leurs travaux virtuels sera nulle (comme on l'a démontré pour un point matériel libre). Le même raisonnement s'applique aux autres points du système ; donc, si le système est en équilibre, la somme des travaux virtuels tant des forces de liaison que des forces données est nulle, pour un déplacement arbitraire des divers points du système. Mais si l'on imprime au système un déplacement compatible avec les liaisons, la somme des travaux des forces de liaisons sera nulle : $\mathcal{T}' = 0$; donc la somme des travaux des forces données doit être nulle : $\mathcal{T} = 0$, puisqu'on a toujours, dans un déplacement quelconque : $\mathcal{T} + \mathcal{T}' = 0$.

La condition est suffisante, c'à d. que si $\mathcal{T} = 0$, le système est en équilibre. En effet, si le système n'était pas en équilibre, il se mettrait en mouvement, et son déplacement réel serait évidemment compatible avec les liaisons. Or le point M_1 par exemple, considéré comme libre, est soumis à la résultante R_1 des forces données et des forces de liaison qui lui sont appliquées ; il se met donc en mouvement dans le sens de R_1, et le travail élémentaire de R_1 dans ce déplacement est positif ; de même pour tous les autres points du système ; donc la somme des travaux élémentaires tant des forces de liaison que des forces données est positive : $\mathcal{T} + \mathcal{T}' > 0$ dans un certain déplacement compatible avec les liaisons. Or, on a dans tous les cas : $\mathcal{T}' = 0$, en vertu du lemme ; donc : $\mathcal{T} > 0$; c'à d. que si le système n'est pas en équilibre, la somme des travaux des forces données n'est pas nulle pour un certain déplacement compatible avec les liaisons.

Dans le cas particulier d'un système à liaisons complètes (système dont la position ne dépend que d'un paramètre) il n'y a qu'un seul déplacement compatible avec les liaisons, à savoir celui qui correspond

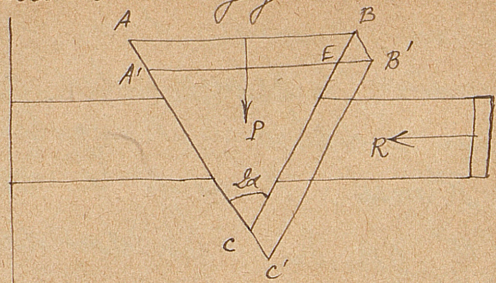
à la variation du paramètre. Tous les points du système sont assujettis à décrire des courbes, et la position de l'un d'entre eux sur sa trajectoire détermine la position de tous les autres, de sorte qu'il suffit de fixer un point du système pour l'immobiliser entièrement (exemples : corps solide mobile autour d'un axe fixe ; vis mobile dans un écrou fixe.) On n'aura donc qu'une équation de l'équilibre

Machines simples. Les systèmes à liaisons complètes les plus simples sont ceux qui ne sont soumis qu'à 2 forces ; on les appelle dans la pratique la puissance (P) et la résistance (R) Puisqu'il n'y a qu'un déplacement compatible avec les liaisons, appelons δP, δR les projections sur chacune des 2 forces du déplacement virtuel de leur point d'application respectif. Le travail élémentaire de chacune d'elles sera : $P\delta P$, $R\delta R$, et la condition d'équilibre sera :

$$P\delta P + R\delta R = 0 \qquad \text{ou :} \qquad \frac{P}{R} = -\frac{\frac{\delta R}{\delta t}}{\frac{\delta P}{\delta t}}$$

Soit V la vitesse virtuelle du point A ; elle est égale à : $\frac{AA'}{\delta t}$;
sa projection sur la force P sera donc : $v' = \frac{\delta P}{\delta t}$.
De même, si u est la vitesse virtuelle du point B, sa projection sur la force R sera : $u' = \frac{\delta R}{\delta t}$
d'où la formule : $\frac{P}{R} = -\frac{u'}{v'}$ qui se traduit ainsi :
Pour qu'il y ait équilibre, il faut (et il suffit) que la puissance et la résistance soient en raison inverse des vitesses de leurs points d'application projetées respectivement sur les 2 forces. Ce principe a été découvert par Galilée, qui l'énonçait : Ce qu'on gagne en force, on le perd en vitesse. — Nous allons le vérifier sur quelques machines simples.

Coin. Le coin est un prisme triangulaire isoscèle engagé entre 2 madriers, l'un fixe, l'autre mobile; la puissance, que nous figurons verticale, est appliquée sur la base du prisme; la résistance s'exerce horizontalement sur le madrier mobile et s'oppose à l'écartement des 2 madriers. Cherchons quelle relation il doit y avoir entre P et R pour qu'il y ait équilibre.

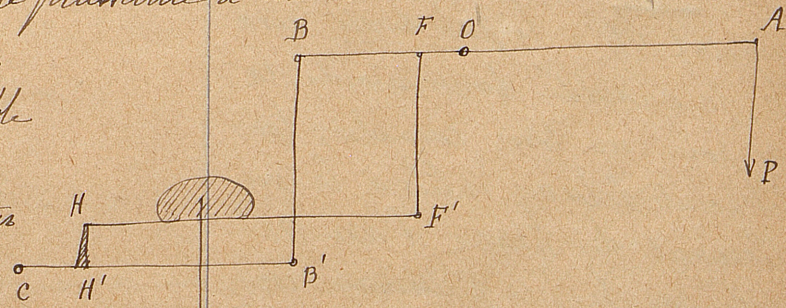


Soit un déplacement virtuel qui amène le coin en A'B'C': le point d'application de P descend de δP: $\delta P = AA' \cos\alpha$ en appelant 2α l'angle au sommet C. Le point d'application de R recule de $\delta R = -EB'$. $EB' = 2.EB\cos\alpha = 2AA'\cos\alpha$.

$P\cos\alpha - 2R\sin\alpha = 0$ $\qquad P = 2R\,tg\,\alpha$

Telle est la condition d'équilibre. On voit que l'avantage de cette machine consiste en ce que, si l'on prend α suffisamment petit, on peut faire équilibre avec une faible puissance à une résistance considérable.

Balance à bascule



Le seul déplacement possible est une oscillation du levier ou fléau AB autour du point d'appui O.

Pour une oscillation infiniment petite, δα, le déplacement de la puissance P est: $OA.\delta\alpha$.

Le déplacement δR de la résistance placée sur le plateau HF' dépend en général de la position du corps sur le plateau, à moins que les déplacements correspondants de H et de F' soient égaux; alors, quand

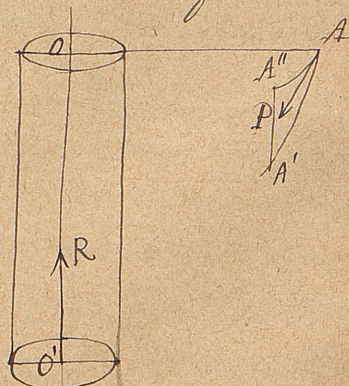
OA s'abaisse de $\delta\alpha$, les 2 points H et F', et par conséquent tout le plateau, montent de la même quantité qui sera δR. Voyons comment la balance doit être construite pour qu'il en soit ainsi. Pour le déplacement angulaire $\delta\alpha$ du fléau, F monte de $OF.\delta\alpha$, et F' aussi ; B monte de $OB.\delta\alpha$, et B' aussi H' monte de $\frac{CH'}{CB'}.OB.\delta\alpha$ On doit donc avoir : $OF = OB\frac{CH'}{CB'}$ $\frac{OF}{OB} = \frac{CH'}{CB'}$ c.à.d. que les 2 droites OB, CB' doivent être divisées dans le même rapport ; à cette condition, le plateau montera parallèlement à lui-même en restant horizontal. On aura donc : $\delta R = OF.\delta\alpha$.

$\delta P = OA.\delta\alpha$ $P.OA - R.OF = 0$ $\frac{P}{R} = \frac{OF}{OA}$

Telle est la condition d'équilibre.

Il suffira de prendre $\frac{OF}{OA}$ dans un rapport donné, $\frac{1}{10}$ par ex. pour faire équilibre à une résistance quelconque par une puissance 10 fois plus faible.

— Vis. Nous supposerons la vis mobile dans un écrou fixe, d'axe vertical OO' ; le pas de vis sera h, la quantité dont monte la vis pour un tour complet ; tous les points de la vis et liés à la vis décrivent des hélices d'axe OO' et de pas h. La puissance est appliquée à l'extrémité d'un bras de levier OA = a et perpendiculaire au plan O'OA. La résistance est verticale, et s'oppose à la progression de la vis dans son écrou.



Quand la vis se déplace ~~la puissance P~~ le point A d'un angle $\delta\alpha$

décrit un arc d'hélice AA'; la projection de cet arc sur le plan OAP est un arc de cercle AA" tangent à P, sa projection sur AP est δP, et comme il est infiniment petit, il est égal à sa projection: $\delta P = a\,\delta\alpha$.

D'autre part, la vis a avancé de $\frac{h}{2\pi}\delta\alpha$, donc: $\delta R = -\frac{h}{2\pi}\delta\alpha$.

$$Pa - \frac{Rh}{2\pi} = 0 \qquad P = \frac{h}{2\pi a} R$$

Telle est la condition d'équilibre.

On voit que la puissance nécessaire pour faire équilibre à une résistance donnée est d'autant plus petite que h est plus petit et que a est plus grand.

Ces exemples suffisent pour faire comprendre l'application du principe des vitesses virtuelles aux systèmes à liaisons complètes.

Considérons maintenant en général un système de n points:

$M_1(x_1 y_1 z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ...... $M_n(x_n, y_n, z_n)$

assujettis à des liaisons qui peuvent s'exprimer par des relations entre les coordonnées de ces divers points:

$$\text{I}\begin{cases} f_1(x_1 y_1 z_1\ x_2 y_2 z_2 \cdots\cdots x_n y_n z_n) = 0 \\ f_2(x_1 y_1 z_1\ x_2 y_2 z_2 \cdots\cdots x_n y_n z_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_h(x_1 y_1 z_1\ x_2 y_2 z_2 \cdots\cdots x_n y_n z_n) = 0. \end{cases}$$

Soit h équations de liaison, que nous supposons distinctes. Il faut que: $h < 3n$, car les variables de ce système I étant les $3n$ coordonnées, si h était égal à $3n$, ces coordonnées auraient des valeurs déterminées par ces équations, et le système ne pourrait se mettre en mouvement, tous ses points étant fixes en vertu des liaisons données.

A plus forte raison h ne peut surpasser $3n$, car alors les équations du système I seraient incompatibles, c.à.d. qu'on ne pourrait trouver aucun système de n points soumis aux h liaisons données ; le problème serait impossible. Posons donc : $h = 3n - k$

k étant au moins égal à 1. Si $k = 1$, le système est à liaisons complètes, car le choix d'une des coordonnées détermine toutes les autres ; c'est le cas que nous venons d'étudier. En général, la position d'équilibre dépendra de <u>k</u> paramètres (c'est ce que les géomètres anglais expriment en disant que le système des n points a <u>k</u> <u>degrés de liberté</u>.)

D'autre part, le point M_1 est soumis à des forces directement appliquées ayant pour résultante $F_1(X_1 Y_1 Z_1)$; sur le point M_2 agit une force $F_2(X_2 Y_2 Z_2)$ etc. ... au point M_n est appliquée la force $F_n(X_n Y_n Z_n)$. Pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels de ces forces soit nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons ; le principe des vitesses virtuelles se traduit donc par l'équation :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i \right] = 0$$

où δx_i, δy_i, δz_i désignent des déplacements compatibles avec les liaisons exprimées par le système I. Telle est la condition de l'équilibre dans le cas le plus général ; c'est l'équation générale de la statique.

Puisque les déplacements sont compatibles avec les liaisons, les fonctions $f_1\, f_2 \ldots\ldots f_h$ ne cessent pas d'être nulles, et par conséquent leurs différentielles totales $df_1, df_2, \ldots. df_h$ sont nulles ; on doit donc avoir pour ces mêmes déplacements :

$$\text{II}\begin{cases} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}\delta x_1 + \frac{\delta f_1}{\delta y_1}\delta y_1 + \frac{\delta f_1}{\delta z_1}\delta z_1 + \cdots\cdots + \frac{\delta f_1}{\delta z_n}\delta z_n = 0 \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}\delta x_1 + \frac{\delta f_2}{\delta y_1}\delta y_1 + \frac{\delta f_2}{\delta z_1}\delta z_1 + \cdots\cdots + \frac{\delta f_2}{\delta z_n}\delta z_n = 0 \\ \text{-------------------} \\ \frac{\delta f_h}{\delta x_1}\delta x_1 + \frac{\delta f_h}{\delta y_1}\delta y_1 + \frac{\delta f_h}{\delta z_1}\delta z_1 + \cdots\cdots + \frac{\delta f_h}{\delta z_n}\delta z_n = 0 \end{cases}$$

Les déplacements virtuels qui figurent dans l'équation du travail doivent vérifier les h équations différentielles linéaires du système II. On pourra les résoudre par rapport à h variations de coordonnées choisies à volonté; celles ci seront exprimées en fonction des k autres, qui resteront arbitraires. On pourra porter ces valeurs dans l'équation générale, il n'y restera plus que les k variations arbitraires; et comme cette équation doit être satisfaite par des valeurs quelconques attribuées à ces variations, les coefficients des k variations arbitraires devront être nuls, séparément, ce qui donnera les k équations de l'équilibre, qui détermineront les k paramètres dont dépend la position d'équilibre.

On peut arriver au même résultat et obtenir des formules symétriques en employant les multiplicateurs de Lagrange. Multiplions les termes de la 1e équation (II) par λ_1, ceux de la 2e par λ_2, ... ceux de la h^e par λ_h, et ajoutons ces h équations à l'équation générale:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\Big[\Big(X_i + \lambda_1\frac{\delta f_1}{\delta x_i} + \lambda_2\frac{\delta f_2}{\delta x_i} + \cdots\cdots + \lambda_h\frac{\delta f_h}{\delta x_i}\Big)\delta x_i$$
$$+\Big(Y_i + \lambda_1\frac{\delta f_1}{\delta y_i} + \lambda_2\frac{\delta f_2}{\delta y_i} + \cdots\cdots + \lambda_h\frac{\delta f_h}{\delta y_i}\Big)\delta y_i$$
$$+\Big(Z_i + \lambda_1\frac{\delta f_1}{\delta z_i} + \lambda_2\frac{\delta f_2}{\delta z_i} + \cdots\cdots + \lambda_h\frac{\delta f_h}{\delta z_i}\Big)\delta z_i\Big] = 0.$$

Cette somme doit être nulle quels que soient les h multiplicateurs indéterminés λ et les k variations arbitraires. On profite de l'indétermination des facteurs λ pour annuler les coefficients des h variations dépendantes; on a ainsi h équations linéaires homogènes qui déterminent les inconnues auxiliaires λ; il reste dans l'équation les k variations arbitraires; leurs coefficients devront être nuls séparément; en portant ds les k équations ainsi obtenues les valeurs trouvées pour les facteurs λ, on ~~en tirera~~ aura les k équations de l'équilibre; ces $(h+k)$ équations sont représentées par:

$$\begin{cases} X_i + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots\cdots + \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial x_i} = 0 \\ Y_i + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y_i} + \cdots\cdots + \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial y_i} = 0 \\ Z_i + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z_i} + \cdots\cdots + \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial z_i} = 0 \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

Soit $3n$ équations qui, jointes aux h équations de liaison, constituent un système de $(3n+h)$ équations entre les $(3n+h)$ inconnues, qui sont les $3n$ coordonnées et les h multiplicateurs de Lagrange.

Les multiplicateurs λ ont d'ailleurs une signification simple: ils représentent les forces de liaison, et permettent de les calculer. En effet les équations de l'équilibre ne seraient pas changées si l'on supprimait la liaison $f_1 = 0$, en ajoutant aux forces données les forces qui ont pour projections: $\lambda \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}$, $\lambda \dfrac{\partial f_1}{\partial y_i}$, $\lambda \dfrac{\partial f_1}{\partial z_i}$ appliquées chacune au point M_i correspondant. Donc ces forces représentent l'effet de la liaison $f_1 = 0$ sur chaque point M_i;

de même pour les autres liaisons, qui peuvent toutes être remplacées par des forces de liaison équivalentes. Quand on aura déterminé $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_h$, on connaîtra ces forces de liaison.

Leur direction est déterminée géométriquement : soit par exemple la force qui a pour projections : $\lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta x_i}$, $\lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta y_i}$, $\lambda_1 \frac{\delta f_1}{\delta z_i}$.

Dans l'équation de liaison correspondante :

$$f_1(x_1 y_1 z_1 \ldots\ldots x_i y_i z_i \ldots\ldots x_n y_n z_n) = 0$$

donnons à toutes les coordonnées des valeurs déterminées (par exemple celles de la position d'équilibre) sauf à $x_i\ y_i\ z_i$; on aura alors l'équation d'une surface passant par le point M_i ; la force de liaison considérée sera normale à cette surface, puisque ses cosinus directeurs sont $\frac{\delta f_1}{\delta x_i}$ $\frac{\delta f_1}{\delta y_i}$ $\frac{\delta f_1}{\delta z_i}$; elle sera égale en grandeur à λ_1.

La méthode que nous venons d'exposer est théoriquement satisfaisante, et elle a l'avantage d'être symétrique ; mais elle est impraticable dès que le système mobile contient un certain nombre de points, parce qu'elle exige l'emploi d'un grand nombre d'équations $(3n + h)$. Nous allons en exposer une autre, due aussi à Lagrange, qui est plus simple et qui réduit le nombre des équations de l'équilibre à son minimum : $k = 3n - h$.

Cette méthode consiste à exprimer les coordonnées des points du système au moyen de k paramètres arbitraires qui déterminent la position du système (k étant toujours le degré de liberté du système.) On a d'abord entre les coordonnées (au nombre de $3n$) h équations de liaison de la forme suivante :

$$f_1(x_1 y_1 z_1 \; x_2 y_2 z_2 \ldots\ldots\ldots x_n y_n z_n) = 0$$
$$f_2(x_1 y_1 z_1 \; x_2 y_2 z_2 \ldots\ldots\ldots x_n y_n z_n) = 0$$
$$\text{— — — — — — — —}$$
$$f_h(x_1 y_1 z_1 \; x_2 y_2 z_2 \ldots\ldots\ldots x_n y_n z_n) = 0$$

A ces équations on ajoutera k équations exprimant toutes les coordonnées (pour garder la symétrie) en fonction de k paramètres :

$$f_{h+1}(x_1 y_1 z_1 \; x_2 y_2 z_2 \ldots\ldots\ldots x_n y_n z_n) = q_1$$
$$f_{h+2}(x_1 y_1 z_1 \; x_2 y_2 z_2 \ldots\ldots\ldots x_n y_n z_n) = q_2$$
$$\text{— — — — — — — —}$$
$$f_{h+k}(x_1 y_1 z_1 \; x_2 y_2 z_2 \ldots\ldots\ldots x_n y_n z_n) = q_k$$

On a ainsi $3n$ équations à $3n$ inconnues. On en tirera les $3n$ coordonnées en fonction des paramètres : $q_1 q_2 \ldots\ldots q_k$, et on pourra donner à ces paramètres des valeurs arbitraires, puisque les valeurs des $3n$ coordonnées satisfont toujours aux équations de liaison dont on les a tirées ; les k paramètres sont donc bien indépendants. Dans la pratique on choisira pour paramètres les grandeurs géométriques dont dépend la position du système, de façon à pouvoir exprimer les coordonnées par des relations simples en fonction des paramètres qui les fixent ; en tout cas, on obtiendra les ~~équations~~ expressions explicites de ces $3n$ coordonnées :

$$\begin{cases} x_i = \varphi_i(q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_k) \\ y_i = \psi_i(q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_k) \\ z_i = \varpi_i(q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_k) \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$$

ce qui donne $3n$ équations. Pour avoir un déplacement compatible

avec les liaisons, on n'aura qu'à donner aux paramètres des accroissements arbitraires : $\delta q_1\ \delta q_2\ \delta q_3 \ldots \delta q_k$, puisque les fonctions précédentes $(x_i\ y_i\ z_i)$ satisfont les équations de liaison quels que soient les paramètres $q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_k$. Les variations correspondantes des coordonnées seront données par les relations :

$$\left\{\begin{array}{l} \delta x_i = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots\cdots + \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}\delta q_k \\ \delta y_i = \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots\cdots + \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q_k}\delta q_k \\ \delta z_i = \dfrac{\partial \varpi_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dfrac{\partial \varpi_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots\cdots + \dfrac{\partial \varpi_i}{\partial q_k}\delta q_k \end{array}\right.$$

On portera alors ces $\underline{3n}$ expressions dans l'équation générale de la statique :

$$\sum_i \left[X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i \right] = 0$$

le 1er membre deviendra une expression linéaire et homogène en $\delta q_1\ \delta q_2 \ldots \delta q_k$:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots\cdots + Q_k \delta q_k = 0$$

où :

$$Q_1 = \sum_i \left[X_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial \varpi_i}{\partial q_1} \right]$$

et ainsi des autres. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que cette équation soit vérifiée quels que soient $\delta q_1\ \delta q_2 \ldots\ldots \delta q_k$; donc il faut et il suffit que leurs coefficients soient nuls, càd qu'on ait séparément : $Q_1 = 0 \quad Q_2 = 0 \quad \ldots \quad Q_k = 0$

ce qui donne les k équations de l'équilibre (entre les k paramètres qui fixent la position ~~(le minimum nécessaire)~~)

Il faut examiner le cas particulier où le 1er membre de l'équation devient une différentielle totale exacte : $Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k = \delta U(q_1 q_2 \ldots q_k)$

c.à.d. $Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}$ $Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}$ .... $Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$

Les équations de l'équilibre reviennent donc à égaler à 0 les dérivées partielles de la fonction $U(q_1 q_2 \ldots q_k)$; ce sont celles qu'on aurait à écrire pour trouver les maxima et minima de la fonction U –

On démontrera plus tard (théorème de Lejeune-Dirichlet) qu'un système de valeurs des k paramètres qui rend U maximum correspond à une position d'équilibre stable.

Cette fonction U existe en particulier quand :

$$\sum_i \left[X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i \right]$$

est la différentielle totale exacte d'une certaine fonction :

$$U(x_1 y_1 z_1 \; x_2 y_2 z_2 \ldots \ldots x_n y_n z_n)$$

indépendamment des équations de liaison, c.à.d. quand il y a pour les forces données une fonction de forces ou un potentiel. Dans ce cas,

$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \ldots\ldots + Q_k dq_k$$

est aussi une différentielle totale exacte car c'est ce que devient :

$$\sum_i \left[X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i \right]$$

quand on y remplace $x_i \; y_i \; z_i$ par leurs expressions en $q_1 q_2 \ldots q_k$; or, en même temps ; $U(x_1 y_1 z_1 \; x_2 y_2 z_2 \ldots x_n y_n z_n)$

devient : $U(q_1 q_2 \ldots q_k)$ et l'on a encore la même identité :

$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \ldots + Q_k dq_k = \delta U(q_1 q_2 \ldots q_k)$$

Donc, pour obtenir la fonction : $U(q_1 q_2 \ldots q_k)$ il suffit de remplacer dans la fonction des forces $x_i \; y_i \; z_i$ par leurs expressions $(\varphi_i \; \psi_i \; \varpi_i)$ en fonction de $q_1 q_2 \ldots q_k$.

La réciproque n'est pas vraie; il se peut que l'expression :

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots\cdots + Q_k \delta q_k$$

soit une différentielle totale exacte sans que la somme des travaux virtuels le soit : car il faut plus de conditions dans le cas de $3n$ variables que pour les k variables $q_1\, q_2 \ldots q_k$.

Appliquons ces conclusions au cas le plus simple, celui d'un système uniquement pesant, c.à.d. où toutes les forces données sont des poids. Prenons un axe Oz vertical dirigé vers le haut; sur chaque point M_i du système agit la force :

$$p_i = m_i g$$

p_i étant le poids de ce point, et m_i sa masse. Les projections de cette force sur les 3 axes sont : $X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad Z_i = -m_i g.$

La somme des travaux virtuels pour un déplacement quelconque est :

$$-\sum m_i g \delta z_i = -g\, \delta \sum m_i z_i$$

On voit que c'est une différentielle totale exacte quelles que soient les liaisons. Soit M la masse totale du système, ζ l'ordonnée du centre de gravité des points pesants; on sait que :

$M\zeta = \sum m_i z_i$ Donc : $\quad \mathcal{T} = -gM\delta\zeta$

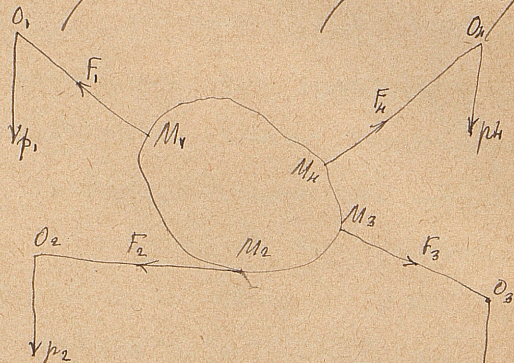
et on a la fonction de forces : $\quad U = -gM\zeta.$

On exprimera ζ en fonction des k paramètres dont dépend la position du système; on cherchera les valeurs de ces paramètres qui rendent ζ maximum ou minimum; à celles qui le rendent minimum correspondent les positions d'équilibre stable (U étant de signe contraire à ζ.)

Remarque de Lagrange. Si l'on admet comme évident (avec Torricelli par exemple) que, pour qu'un système pesant soit en équilibre,

il faut et il suffit que son centre de gravité soit à une hauteur maxima ou minima, c.à.d. que la variation de cette hauteur s'annule: $\delta\zeta = 0$, on peut en déduire le principe des vitesses virtuelles dans toute sa généralité.

En effet, on peut transformer tout système en un système uniquement pesant. Considérons par exemple le point M_1, soumis à la force F_1. Sur la direction M_1F_1 prenons un point arbitraire O_1, supprimons la force F_1 et remplaçons-la par un fil qui, attaché au p. M_1 et passant sur O_1 sans frottement supporte un poids $p_1 = F_1$. Rien ne sera changé au système; opérons de même sur tous les autres points; on remplacera toutes les forces appliquées au système par des poids, que relieront des fils ~~et~~ des points sans masse, de sorte que le système sera uniquement pesant.



Prenons un axe vertical Oz, et posons: $M_1O_1 = r_1$, $M_2O_2 = r_2$, ... $M_nO_n = r_n$.
Le travail virtuel de F_1 sera: $-F_1\,\delta r_1$, car il est positif quand r_1 diminue; et ainsi des autres: $\quad \mathcal{T} = -\sum F_i\,\delta r_i$

Telle est la somme des travaux virtuels des forces données. D'autre part, P étant le poids total du système transformé, c.à.d. $\sum p_i$, et ζ l'ordonnée du centre de gravité, on a: $\quad P\zeta = \sum p_i z_i$

et par suite: $\quad P\delta\zeta = \sum p_i\,\delta z_i$

Or $\delta z_1 = -\delta r_1$ puisque les fils ont une longueur constante; $p_i = F_i$; donc: $\quad P\delta\zeta = -\sum F_i\,\delta r_i = \mathcal{T}$.

Pour que le système (pesant) soit en équilibre, il faut et il suffit (par hypothèse) que $\delta\zeta$ soit nul; donc, pour qu'un système quelconque (comme

le système proposé) soit en équilibre, il faut et il suffit que $\mathcal{E}$ soit nul, c.à.d. que pour tout déplacement compatible avec les liaisons la somme des travaux virtuels des forces données soit nulle. c.q.f.d.

Nous allons voir comment, dans certains cas particuliers, se simplifie l'équation générale : $\sum_i (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$

Supposons que les liaisons permettent de déplacer tout le système en bloc parallèlement à un axe, Ox par exemple : cette translation d'ensemble étant compatible avec les liaisons, l'équation de l'équilibre sera pour ce déplacement : $\sum X_i \delta x_i = \delta x \sum X_i = 0$

On devra donc avoir : $\sum X_i = 0$.

Donc, quand les liaisons admettent une translation suivant une direction quelconque, pour qu'il y ait équilibre il faut que la somme des projections des forces données sur cette direction soit nulle.

Supposons que les liaisons permettent au système de tourner tout d'une pièce autour d'un axe, Oz par exemple : soient r_i, θ_i les coordonnées polaires de la projection du point M_i sur le plan des (x,y) : $x_i = r_i \cos\theta_i$ $\quad y_i = r_i \sin\theta_i$ $\quad z_i = \text{const}^e$

Dans la rotation virtuelle considérée, r_i, z_i restent constants ; seul θ_i varie de $\delta\theta$, qui est le même pour tous les points ; donc $\delta x_i = -r_i \sin\theta_i \delta\theta = -y_i \delta\theta$ $\quad \delta y_i = r_i \cos\theta_i \delta\theta = x_i \delta\theta$ $\quad \delta z_i = 0$.

L'équation de l'équilibre devient : $\sum (Y_i x_i - X_i y_i) \delta\theta = 0$

On doit donc avoir : $\sum [x_i Y_i - y_i X_i] = 0$

ce qui s'énonce :

Quand un système peut tourner d'une seule pièce autour d'un axe, pour qu'il soit en équilibre il faut que la somme des moments des forces

données par rapport à cet axe soit nulle.

Considérons maintenant un corps solide entièrement libre, soumis à l'action des forces F_1 F_2 .... F_n. Sa position dépend de 6 paramètres, par exemple les 3 coordonnées d'un de ses points et les 3 angles d'Euler (qui fixent la position d'un trièdre trirectangle par rapport au trièdre des axes : car les 9 cosinus des angles que font 3 axes mobiles avec 3 axes fixes admettent 6 relations, ce qui les réduit à 3 paramètres.)

Ainsi : $k = 6$, et l'on doit avoir 6 équations de l'équilibre.

Or les liaisons du système permettent au corps de se déplacer en bloc suivant chacun des 3 axes ; on doit donc avoir :

$$\Sigma X = 0 \qquad \Sigma Y = 0 \qquad \Sigma Z = 0$$

Elles permettent aussi une rotation d'ensemble du corps autour de chacun des 3 axes : on doit donc avoir aussi :

$$\Sigma(xY - yX) = 0 \qquad \Sigma(yZ - zY) = 0 \qquad \Sigma(zX - xZ) = 0$$

on retrouve ainsi les 6 conditions d'équilibre d'un corps entièrement libre.

Soit un corps solide mobile autour d'un point fixe O ; sa position dépend de 3 paramètres, puisqu'il a un point immobile, et que son orientation seule peut varier autour de ce point ; donc $k = 3$; il faut 3 équations. Or les liaisons ne permettent plus aucune translation, mais elles permettent au corps de tourner autour de chacun des 3 axes ; on doit donc avoir :

$$\Sigma(xY - yX) = 0 \qquad \Sigma(yZ - zY) = 0 \qquad \Sigma(zX - xZ) = 0.$$

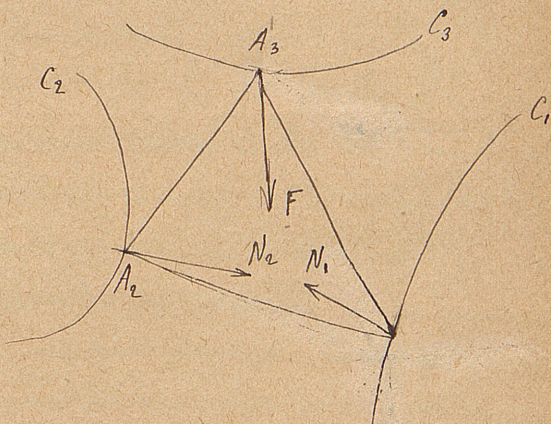
Soit un corps solide ayant 2 points fixes, c.à.d. ne pouvant que tourner autour d'un axe Oz : sa position ne dépend que d'un paramètre, puisqu'il n'y a qu'un déplacement compatible avec les liaisons ; $k = 1$; il suffit d'une équation pour fixer la position d'équilibre, et cette équation est, nous venons de le voir ; $\Sigma(xY - yX) = 0$.

Soit enfin un corps solide reposant sur un plan fixe, le plan des (xy); sa position ne dépend que de 3 paramètres, 2 pour fixer un de ses points, 1 pour fixer son orientation autour de ce point; on aura à écrire 3 équations (K = 3). Or les liaisons admettent 2 translations suivant Ox, Oy et une rotation autour de Oz; on doit donc avoir:

$$\Sigma X = 0 \qquad \Sigma Y = 0 \qquad \Sigma (xY - yX) = 0.$$

On peut déduire du principe des vitesses virtuelles certains théorèmes de géométrie, notamment l'existence du centre instantané de rotation —

Considérons d'abord dans le plan un triangle $A_1 A_2 A_3$ dont 2 sommets, $A_1 A_2$ glissent sans frottement sur 2 courbes fixes $C_1 C_2$. Il constitue un système à liaisons complètes. Supposons qu'une force F soit appliquée en A_3; on demande la position d'équilibre du système.

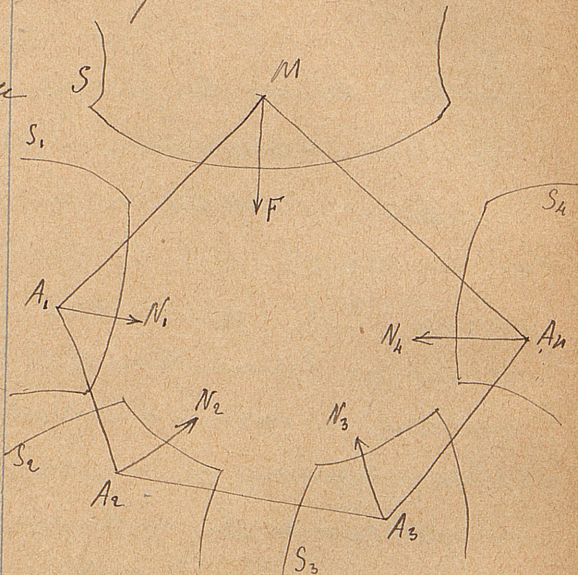


On pourrait considérer les réactions normales des 2 courbes fixes sur $A_1 A_2$: N_1, N_2; pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que les 3 forces F, N_1, N_2 soient concourantes ou parallèles, et que l'une d'elles soit égale à la résultante des 2 autres et directement opposée; mais ici, la 1re condition suffit, car les réactions sont indéterminées en grandeur et seront toujours égales et opposées aux composantes de F suivant leurs directions.

Appliquons le principe des vitesses virtuelles; il n'y a plus à considérer les forces de liaison. Le seul déplacement compatible avec les liaisons fait décrire au point A_3 la courbe C_3; pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que le travail de la force F soit nul dans ce déplacement, c.à.d.

que F soit normale à la courbe C_3 ; donc les normales en $A_1 A_2 A_3$ aux 3 trajectoires $C_1 C_2 C_3$ doivent être concourantes. Comme le même raisonnement s'appliquerait à un point quelconque invariablement lié à A_1, A_2, il s'ensuit que la normale à la trajectoire d'un point quelconque de la figure mobile passe par le point de rencontre des normales à $C_1 C_2$ en $A_1 A_2$, qu'on nomme pour cette raison le centre instantané de rotation.

De même, considérons dans l'espace un corps solide dont le points, $A_1 A_2 A_3 A_4$ glissent sans frottement sur le surfaces fixes $S_1 S_2 S_3 S_4$. Soit un point M de ce solide, sur lequel agit une force F. Dans ce système, $k = 2$, car la position d'un solide dépend de 6 paramètres, et les liaisons (surfaces donnant chacune 1 équation) n'en déterminent que 4.



Donc les coordonnées du point M dépendent de 2 paramètres, c.à.d. que ce point décrit une surface fixe S. En vertu du principe des vitesses virtuelles, pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que la force F soit normale à S — D'autre part, le corps solide peut être considéré comme libre et en équilibre sous l'action de F et des 4 réactions normales en $A_1 A_2 A_3 A_4$, soient $N_1 N_2 N_3 N_4$: pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que ces 5 forces se fassent équilibre — Or il existe dans ce cas 2 droites réelles ou imaginaires qui s'appuient sur ces 5 forces. En effet, il en existe toujours 2 qui passent par $N_1 N_2 N_3 N_4$; car une droite mobile G s'appuyant constamment sur $N_1 N_2 N_3$ engendre

une surface du 2e degré qui rencontre N_4 en 2 points réels ou imaginaires P', P'', qui déterminent 2 positions G' G'' de la génératrice : ces 2 positions sont d'ailleurs réelles ou imaginaires comme les 2 points P', P''. Or si F fait équilibre aux 4 forces N_1 N_2 N_3 N_4, elle doit avoir un moment nul par rapport à chacune des 2 droites G', G'' ; donc elle les rencontre aussi ; ainsi pour qu'il y ait équilibre, il faut (et il suffit) que la force donnée F rencontre les 2 droites réelles ou imaginaires qui passent par les 4 normales N_1 N_2 N_3 N_4. — Or on a vu que dans le cas d'équilibre, F est normale à la surface S : donc la normale en M à la surface S doit rencontrer les 2 droites qui s'appuient sur les normales aux 4 surfaces S_1 S_2 S_3 S_4 aux points A_1 A_2 A_3 A_4. Cette propriété donne le moyen de construire la normale à la surface S en M : on construira d'abord les 2 droites G', G'' comme il vient d'être dit, et on mènera par le point M la droite qui rencontre à la fois G' et G'' ; la solution existe toujours, et elle est unique.

Dynamique

Dynamique du point matériel

(1er cahier, page 68)

Nous avons précédemment établi le théorème fondamental de la dynamique, qui se traduit par les équations du mouvement :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

On sait que pour avoir le mouvement il faut intégrer ces équations, qui forment le système d'équations différentielles du 2e ordre le plus général, quand la force dépend à la fois de la position du point mobile, de sa vitesse et du temps. On a vu que les intégrales générales de ce système contiennent 6 constantes arbitraires que l'on détermine par les conditions initiales, c.à.d par la position initiale ($x_0\ y_0\ z_0$) et la vitesse initiale $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$. On a admis que pour des conditions initiales données il n'y a qu'un système de constantes, c.à.d. qu'il n'y a qu'un seul mouvement possible pour un point matériel lancé d'un point donné avec une vitesse donnée en grandeur et en direction — On pourrait déterminer le mouvement par d'autres conditions, par exemple en demandant que le mobile partît d'un point ($x_0\ y_0\ z_0$) et arrivât en un point ($x_1\ y_1\ z_1$). Mais alors le système des intégrales générales peut admettre plusieurs solutions pour les constantes, c.à.d. qu'il y aura plusieurs mouvements possibles dans les conditions imposées (On a vu qu'au contraire, la position d'un

fil est complètement déterminé quand on se donne les 2 points d'attache.)

Dans le cas où l'on a une relation de la forme :

$$f\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t, C_1\right) = 0$$

on connaît une intégrale première du système ; les équations seront intégrées quand on aura 6 intégrales premières distinctes où figureront les 6 constantes. En effet, on résoudrait ces équations par rapport à x, y, z, et on obtiendrait ces coordonnées en fonction du temps et des 6 constantes ; ce seraient les intégrales générales du système.

Théorème des forces vives. Pendant le laps de temps dt, le mobile se déplace d'une longueur qui a pour projections dx, dy, dz, c.à.d. passe du point (x, y, z) au point $(x+dx, y+dy, z+dz)$. Faisons sur les équations du mouvement la combinaison qui donne le travail élémentaire, en les multipliant respectivement par dx, dy, dz :

$$d\mathcal{T} = X dx + Y dy + Z dz = m\left[\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right]$$

Puisque le travail élémentaire est indépendant du choix des axes, le dernier membre doit l'être aussi. En effet, soit V la vitesse du p. mobile à l'instant considéré ;

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$d(V^2) = 2\left[\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right]$$

On a donc

$$m\frac{d(V^2)}{2} = X dx + Y dy + Z dz \quad \text{ou} \quad d.\frac{mV^2}{2} = d\mathcal{T}.$$

Définition : La quantité numérique mV^2 s'appelle force vive du point mobile à l'instant considéré. D'où la proposition :

— La différentielle de la demi-force vive correspondant au laps dt est égale au travail élémentaire, pendant ce temps, de la résultante des

forces qui agissent sur le point, ou à la somme des travaux élémentaires des composantes.

On peut intégrer cette équation différentielle pour en tirer une relation finie entre la force vive et le travail. Supposons que de l'instant t_0 à l'instant t, le mobile se déplace de M_0 en M, et intégrons de t_0 à t :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{t_0}^{t} (X dx + Y dy + Z dz) = \mathcal{C}$$

$\mathcal{C}$ étant le travail total des forces de M_0 à M ; v_0 étant la vitesse en M_0, v la vitesse en M. D'où le théorème suivant :

La variation de la demi-force vive pendant un temps fini est égale au travail total, pendant le même temps, des forces appliquées au mobile.

Au point de vue analytique, le théorème des forces vives fournit une intégrale première quand il existe une fonction des forces. On sait que s'il y a une fonction des forces : $X dx + Y dy + Z dz = dU(x\,y\,z)$ on peut évaluer le travail total des forces entre les points M_0 et M, c.à.d. intégrer

$$\int_{t_0}^{t} (X dx + Y dy + Z dz)$$

en connaissant seulement les points M_0 et M, et indépendamment de la trajectoire suivie entre eux. On a dans ce cas la relation :

$$d\,\frac{mv^2}{2} = dU$$

qui s'intègre immédiatement :

$$\frac{mv^2}{2} = U + h$$

h : constante des forces vives.

Cette équation s'appelle l'intégrale des forces vives. On peut déterminer la constante h par les conditions initiales ; soit v_0 la vitesse initiale U_0 la valeur de U correspondante : $\frac{mv_0^2}{2} = U_0 + h$ d'où :

$$h = \frac{mv_0^2}{2} - U_0 \qquad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = U - U_0$$

On pouvait tirer directement cette équation de la relation différentielle des forces vives; mais il faut bien remarquer qu'on n'introduit ainsi qu'une constante arbitraire.

Quand V est une fonction uniforme, la vitesse du mobile redevient la même (en grandeur) chaque fois que le mobile passe par la même surface de niveau. En effet, V a la même valeur sur cette surface, donc v reprendra la même valeur numérique: sa direction pourra être toute différente — Mais si la fonction V n'est pas uniforme, il y a lieu de tenir compte de la trajectoire suivie par le mobile entre 2 passages consécutifs par une même surface de niveau: selon cette trajectoire, en effet, on pourra retrouver au 2e point la même valeur de V qu'antér., ou une autre détermination de V.

Nous commencerons par étudier le mouvement le plus simple: Mouvement rectiligne d'un point matériel.

Théorème: Quand la force qui agit sur un point et sa vitesse initiale sont parallèles à un plan, le point se meut dans un plan parallèle.

En effet, si la force est constamment parallèle au plan des (xy) par exemple on a: $Z = 0$ donc: $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ $\frac{dz}{dt} = C$

Or la valeur initiale de $\frac{dz}{dt}$ est 0; donc: $C = 0$, et on a constamment $\frac{dz}{dt} = 0$, d'où: $z = z_0$, c.q.f.d.

Théorème: Quand la force qui agit sur un point et sa vitesse initiale sont parallèles à un axe, le point se meut suivant une droite parallèle à cet axe — Il suffit de répéter le théorème précédent pour 2 axes: soit la force parallèle à Ox: $Y = 0$, $Z = 0$, $\frac{dy}{dt} = C$, $\frac{dz}{dt} = C'$.

Or: $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0$ Donc: $y = y_0$, $z = z_0$, c.q.f.d.

Soit donc un point mobile décrivant une droite; on peut prendre cette droite pour axe des x. La force sera dirigée suivant l'axe; on aura une seule équation :

$$X = \Phi\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

éq. différentielle du 2e ordre, dont l'intégrale contiendra 2 constantes arbitraires. — On en peut ramener l'intégration à des quadratures quand la force ne dépend que d'une des 3 quantités : x, v, t.

Supposons d'abord : $X = \Phi\left(\frac{dx}{dt}\right)$ $\quad m\frac{dv}{dt} = \Phi(v)$

Donc : $dt = \frac{m\,dv}{\Phi(v)}$ $\quad t - t_0 = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\Phi(v)}$ D'autre part :

$dx = v\,dt = m\frac{v\,dv}{\Phi(v)}$ $\quad x - x_0 = m\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{\Phi(v)}$

Les 2 constantes sont t_0, x_0.

Pour avoir l'équation du mouvement, c.à.d. x en fonction de t, on éliminera v entre les 2 intégrales.

Supposons ensuite : $X = \Phi(t)$ $\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi(t)$

On aura x en fonction de t par 2 quadratures.

Supposons enfin (c'est le cas le plus fréquent et le plus important) :

$X = \Phi(x)$ $\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi(x)$

Le théorème des forces vives fournit alors une intégrale première :

$\frac{mv^2}{2} = \int \Phi(x)\,dx$ avec une constante arbitraire.

On a alors : $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \psi(x)$ d'où : $t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\psi(x)}}$

avec une 2e constante d'intégration qu'on peut annuler en faisant $t = 0$ pour la position $x = x_0$.

On a ainsi le temps en fonction de la position ; pour avoir inversement x en fonction de t, c.à.d. l'équation ordinaire du mouvement, il faut faire l'inversion de la quadrature précédente. Cela n'est pas nécessaire pour la discussion du mouvement.

On voit qu'il y a une ambiguïté de signe dans l'équation du mouvement ; cette ambiguïté ne saurait exister dans la réalité. On déterminera donc le signe par les conditions initiales : si la vitesse initiale est positive, on prendra le signe + à partir du moment initial : $\frac{dx}{dt} = +\sqrt{\varphi(x)}$ et on suivra par continuité cette détermination du radical jusqu'à ce qu'il devienne nul ou infini.

Supposons que dans l'intervalle (x_0, x_1) ou M_0M_1 $\left(x_0 < x_1, \text{ puisque } \frac{dx}{dt} > 0\right)$ $\varphi(x)$ reste finie et différente de 0 ; le point mobile arrivera en M_1 en un temps fini, car $\varphi(x)$ admettant une limite inférieure plus grande que 0, t_1 aura une limite supérieure finie.

Supposons que la première discontinuité qu'éprouve la fonction $\varphi(x)$ soit un infini au point A $(x = \alpha)$. La considération précédente peut s'appliquer à tout l'intervalle M_0A : donc le mobile arrive en un temps fini au point A, et les formules lui assignent une vitesse infinie en ce point. Cela étant physiquement impossible, il faut en conclure que les formules ne sont vraies que jusqu'à un point : $x = \alpha - \varepsilon$ aussi voisin qu'on veut de A, et qu'à partir de ce point le mouvement est arrêté ou transformé par une cause étrangère qui ne figure pas dans les équations.

Supposons que la première discontinuité que rencontre $\varphi(x)$ soit au contraire ~~une~~ racine, et que le p. A soit ce qu'on appelle un zéro simple c.à.d. $\varphi(x) = (\alpha - x)\,\phi(x)$ $\phi(a) \gtrless 0$

Or : $a - x > 0$ dans tout l'intervalle M_0A (x_0, a) ; donc pour que $\sqrt{\psi(x)}$ soit réelle, il faut qu'on ait : $\varphi(x) > 0$, $\varphi(a) > 0$.
Le mobile approche autant qu'on veut du point A, car dans tout intervalle $M_0M_1 < M_0A$ le raisonnement fait précédemment s'applique ; la vitesse restant finie et non nulle, le temps reste fini. Reste à savoir si le mobile arrive en A en un temps fini ; pour cela, voyons si l'intégrale

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{a-x}\,\sqrt{\varphi(x)}}$$

devient infinie pour $x = a$.
Or l'élément différentiel devient bien infini pour $x = a$, mais l'intégrale reste finie, car l'élément différentiel est de l'ordre $\frac{1}{2}$. Vérifions-le par un calcul direct ; puisque $\varphi(a) > 0$ $\quad \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}} < K$

$$t < K \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = 2K\left(-\sqrt{a-x} + \sqrt{a-x_0}\right)$$

Si x tend vers a, on a toujours : $t < 2K\sqrt{a-x_0}$
t a une limite supérieure finie ; ainsi le mobile arrive en A en un temps fini avec une vitesse nulle. Il est à ce moment dans le même état que si on l'abandonnait à lui-même au p A sans vitesse initiale. D'ailleurs il ne franchit pas le p. A, car au-delà v devient imaginaire ($\psi(x)$ changeant de signe pour $x = a$). Donc, ou bien il reste en A indéfiniment (en équilibre) ou bien il retourne vers O.
Or la force n'est pas nulle, mais négative ; en effet :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (a-x)\,\varphi(x) \qquad 2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \left[(a-x)\,\varphi'(x) - \varphi(x)\right]\frac{dx}{dt}$$

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m}{2}\left[(a-x)\,\varphi'(x) - \varphi(x)\right]$$

Faisons $x = a$, et rappelons-nous que : $\varphi(a) > 0$;

$X = -\frac{m}{2}\varphi(a)$ donc on a bien : $X < 0$.

Ainsi le mobile revient en arrière avec une vitesse négative ; on prendra le signe — devant le radical. On voit que la vitesse repasse par les mêmes valeurs aux mêmes points, seulement elles ont changé de signe — On suivra ainsi d'une façon continue le mouvement jusqu'à la première discontinuité de $\psi(x)$, sur laquelle on fera les mêmes raisonnements. Si c'est un infini, le mouvement se termine en ce point et même avant ; si c'est un zéro simple, le mobile y arrivera sans s'y arrêter, et reviendra en sens inverse, de sorte que son mouvement se composera d'une succession indéfinie d'oscillations entre les 2 points.

Examinons enfin le cas où la fonction $\psi(x)$ passe par un zéro multiple, par exemple un zéro double ; soit A $(x=a)$ ce point de discontinuité :
$$\psi(x) = (a-x)^2\varphi(x) \qquad \varphi(a) \gtrless 0.$$
Le mobile approche autant qu'on veut du point A, car dans tout intervalle $M_0M < M_0A$, l'intégrale $t = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{\varphi(x)}}$ reste finie. Mais pour $x=a$, l'élément différentiel devient un infiniment petit du 1er ordre, donc l'intégrale devient infinie, comme on peut le vérifier simplement : $\varphi(x)$ restant finie, on a : $\frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}} > K$ $\quad t > K\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{a-x} = K\log\frac{a-x_0}{a-x}$

Pour $x=a$, le logarithme est infini ; donc quand x tend vers a, t augmente indéfiniment. Ainsi, quand le temps augmente indéfiniment, le mobile approche du point A sans l'atteindre jamais. On va voir que ce point A est pour le mobile une position d'équilibre instable.
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (a-x)^2\varphi(x) \qquad 2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \left[(a-x)^2\varphi'(x) - 2(a-x)\varphi(x)\right]\frac{dx}{dt}$$

$$X = m\frac{dx}{dt^2} = \frac{m}{2}\left[(a-x)^2\varphi'(x) - 2(a-x)\varphi(x)\right]$$

Donc pour $x = a$, $X = 0$.

La force étant nulle en A, le point y serait en équilibre. D'ailleurs, pour $x = a - \varepsilon$ la force serait négative; pour $x = a + \varepsilon$ elle serait positive; donc, si l'on écarte le mobile de sa position d'équilibre A, la force tend à l'en écarter davantage, c.à d. que l'équilibre est instable.

Nous allons traiter quelques exemples de mouvement rectiligne.

Mouvement vertical d'un point pesant dans le vide.

Prenons pour axe des x une verticale dirigée vers le haut. Supposons le point mobile lancé de O suivant Ox avec la vitesse initiale v_0. Il est soumis à la force mg, qui est son poids, dirigé vers le bas:

$X = -mg$ force constante; donc $\frac{d^2x}{dt^2} = -g$.

On peut employer ici les 3 modes d'intégration; on a d'abord:

$\frac{dx}{dt} = -gt + v_0$ car la constante d'intégration est la valeur de $\frac{dx}{dt}$ pour $t = 0$; puis:

$x = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t$ la constante d'intégration est nulle si l'on veut que $x = 0$ pour $t = 0$.

Supposons $v_0 > 0$, c.à d. le mobile lancé vers le haut, on aura $\frac{dx}{dt} > 0$ tant que $t < \frac{v_0}{g}$. A l'instant $t_1 = \frac{v_0}{g}$, le mobile est au point A: $x_1 = \frac{v_0^2}{2g}$. A partir de cet instant, le mobile retombe du p. A comme s'il était soumis à son seul poids, sans vitesse initiale, et reprend en chaque point la même vitesse qu'en

montant, mais changée de signe. En particulier, il repasse en O avec la vitesse v_0.

Appliquons maintenant le théorème des forces vives :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -2gx + h \qquad \text{Or} \quad h = v_0^2 \qquad \text{pour } x = 0.$$

$$v^2 - v_0^2 = -2gx \qquad dt = \frac{dx}{\pm\sqrt{v_0^2 - 2gx}}$$

On prendra d'abord le signe +, puisque la vitesse initiale est positive. La première discontinuité a lieu pour $x = \frac{v_0^2}{2g}$ (au point A) le mobile arrive en A avec une vitesse nulle et comme sa vitesse change de signe, il redescend. On voit que la vitesse ne dépend que de l'abscisse x, de sorte qu'elle reprend la même valeur absolue aux mêmes points.

— Mouvement rectiligne d'un point matériel attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance.

Soit O le centre attractif pris pour origine ; Ox la direction du mouvement (déterminée par la vitesse initiale) la force F est dirigée vers O et proportionnelle à OM ; donc : $X = -k^2 m x$.

(la force attractive est constamment de signe contraire à l'abscisse, toutes les fois que la force est proportionnelle à une puissance impaire de l'abscisse) $\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0$

On a une équation linéaire du 2e ordre à coefficients constants ; son intégrale générale est : $x = A\cos kt + B\sin kt$

On détermine les 2 constantes par les conditions initiales : pour $t = 0$, $x_0 = A$. D'autre part : $\frac{dx}{dt} = -Ak\sin kt + Bk\cos kt$

pour $t = 0$, $v_0 = Bk$. On a donc l'équation :

$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt$ fonction périodique ayant pour période : $T = \frac{2\pi}{k}$.

Ainsi quand t augmente de T, le mobile se retrouve dans la même position avec la même vitesse (algébrique, c.à.d en grandeur et en direction).

– Examinons le cas où le mobile serait abandonné sans vitesse initiale :

$x = x_0 \cos kt$ En combien de temps arrive-t-il en O ?

Faisons $x = 0$; $kt = \frac{\pi}{2}$ $t = \frac{\pi}{2k} = \frac{T}{4}$.

Ainsi le temps que met le mobile à tomber sur O est indépendant de x_0, de sorte que des mobiles placés à des distances différentes et abandonnés sans vitesse initiale arriveraient en même temps en O ; c'est un exemple de mouvement tautochrone.

Le mobile dépasse le point O et x prend des valeurs égales et de signes contraires ; le mouvement est symétrique par rapport à O ; le mobile s'arrête au point $-x_0$, à l'instant : $t = \frac{\pi}{k} = \frac{T}{2}$.

Il exécute donc une suite indéfinie d'oscillations entre x_0 et $-x_0$; la durée d'une oscillation simple est $\frac{\pi}{k}$; la durée d'une oscillation complète est $T = \frac{2\pi}{k}$.

On peut aussi intégrer par le théorème des forces vives :

$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x$ $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -k^2x^2 + h$ $h = v_0^2 + k^2 x_0^2$

puisque h est essentiellement positive, on posera : $h = k^2 a^2$ $a^2 > x_0^2$.

Alors : $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k^2(a^2 - x^2)$ $v = k\sqrt{a^2 - x^2}$

Supposons le point mobile lancé de M_0 ($x_0 > 0$) dans le sens opposé à la force ($v_0 > 0$). La première discontinuité de v est : $x = a$

Le mobile y arrive en un temps fini, car c'est un zéro simple. Il revient ensuite vers O, qu'il dépasse jusqu'au point : $x = -a$, d'où il revient encore ; il oscille donc indéfiniment entre ces 2 points $(-a, +a)$ – Intégrons la vitesse : $k\,dt = \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$kt = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad x = a \sin(kt - C)$$

On retrouve ainsi l'intégrale générale : $x = A \cos kt + B \sin kt$.
et si l'on fait $a = x_0$, et $t = 0$ pour $x = x_0$, on retrouve l'équation particulière : $x = x_0 \cos kt$

— Mouvement rectiligne d'un point dans un milieu résistant. Il semble que la résistance exercée par un milieu sur un point matériel n'ait pas de sens. Mais si l'on considère un solide mobile, on voit qu'il est soumis, d'abord aux forces données, son poids par ex, et puis aux pressions du milieu ambiant, l'air par ex, sur sa surface ; s'il est en mouvement, l'air exercera sur chacun des éléments de sa surface des réactions qu'on nomme résistances. Ces forces pourront toujours se ramener à une force appliquée au centre de gravité, par ex., et à un couple. Or on démontrera plus tard que le mouvement du centre de gravité d'un solide est le même que celui d'un point matériel ayant pour masse la masse totale m, et soumis à toutes les forces qui agissent sur le solide ; ainsi les résistances qui s'exercent sur la surface du solide, transportées en son centre de gravité, ont pour résultante unique leur résultante générale R. On négligera donc le couple, qui n'intervient que dans le mouvement du corps relativement à son centre de gravité, et on considérera le centre de gravité comme soumis à la force mg, poids du corps, et à la résultante R des résistances du milieu ambiant.

Si le corps a une surface symétrique par rapport à la verticale qui passe par son centre de gravité, la résultante R sera verticale; autrement, la résultante serait oblique et ferait sortir le corps de la verticale; nous n'aurions donc plus un mouvement rectiligne. — Nous avons donc à étudier le mouvement vertical d'un point matériel sollicité par le poids mg et par une résistance verticale opposée à sa vitesse.

Cette résistance dépend évidemment de la vitesse, et croît avec elle: c'est une fonction de la vitesse que l'on détermine par l'expérience. Pour de petites vitesses, la résistance est considérée comme proportionnelle à la vitesse; pour de plus grandes vitesses, la résistance est sensiblement proportionnelle au carré de la vitesse; enfin pour de très grandes vitesses, on trouve que la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse. — Nous poserons d'une manière générale:

$$R = m(h + kv^n) \qquad n > 0.$$

La constante h représente le frottement, qui est une résistance constante. Si le corps tombe, on a: $h < g$ car la valeur initiale de la résistance est mh; si le frottement était considérable, le corps ne tomberait pas.

Soit v_0 la vitesse initiale dirigée vers le bas; nous prendrons un axe dirigé verticalement en bas, de sorte que: $v_0 \geq 0$.

L'équation du mouvement est: $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - m(h + kv^n)$

Prenons pour inconnue auxiliaire la vitesse: $\frac{dx}{dt} = v$:

$$\frac{dv}{dt} = g - h - kv^n = k(\alpha^n - v^n) \qquad \text{en posant: } \alpha^n = \frac{g-h}{k}$$

α est une constante réelle et déterminée.

$$k\,dt = \frac{dv}{\alpha^n - v^n} \qquad kt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\alpha^n - v^n}$$

On a ainsi le temps en fonction de la vitesse par une quadrature. Elle s'intègre immédiatement si n est entier. Si n est fractionnaire, on peut la ramener à la forme rationnelle par le changement de variables :

$$n = \frac{p}{q} \qquad v = u^q.$$

On aura x par la formule : $\quad dx = v\,dt$

d'où : $$k\,dx = \frac{v\,dv}{\alpha^n - v^n} \qquad kx = \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{\alpha^n - v^n}$$

quadrature qu'on obtiendra aisément pourvu que n soit commensurable. On peut discuter le problème sur ces formules mêmes, sans avoir besoin de les intégrer.

Supposons d'abord : $\quad v_0 < \alpha \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)_0 > 0$

donc la vitesse croît tant que $v < \alpha$. La dérivée s'annule pour $v = \alpha$. Mais cela n'aura jamais lieu, car quand v tend vers α, t tend vers ∞ : en effet, l'élément différentiel :

$$\frac{1}{\alpha^n - v^n} = \frac{1}{\alpha - v} \cdot \frac{\alpha - v}{\alpha^n - v^n}$$

devient, pour $v = \alpha$, un infiniment grand de l'ordre de $\frac{1}{\alpha - v}$, car la fraction : $\frac{\alpha - v}{\alpha^n - v^n}$ a une limite finie.

Donc l'intégrale devient infiniment grande comme : $\log(\alpha - v)$

Ainsi quand t croît indéfiniment, v tend vers α en croissant. Le mouvement tend donc avec le temps à devenir uniforme.

Supposons maintenant : $\quad v_0 > \alpha \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right)_0 < 0.$

la vitesse décroît tant que $v > \alpha$; or quand $v = \alpha$, $t = \infty$.

Donc la vitesse décroît constamment et tend vers α. Le mouvement tend encore à devenir uniforme.

Enfin, dans le cas où : $v_0 = \alpha$, $\frac{dv}{dt} = 0$

la vitesse reste constamment égale à α : le mouvement est uniforme. Remarquons que les conclusions de cette discussion sont indépendantes de la valeur et de la nature de l'exposant n

Soit maintenant la vitesse initiale v_0 dirigée vers le haut ; pour n'avoir pas à tenir compte de l'exposant n (à cause du signe négatif de v_0) prenons un axe Ox vertical vers le haut, de sorte que $v_0 > 0$. La résistance sera dirigée vers le bas tant que le p. mobile montera : elle est donc négative comme le poids :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - m(h + kv^n) \qquad \frac{dv}{dt} = -k(\beta^n + v^n)$$

en posant : $\beta^n = \frac{g+h}{k}$ β sera une constante réelle —

$$kt = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\beta^n + v^n} \qquad kx = -\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{\beta^n + v^n}$$

ces quadratures seront intégrables pourvu que n soit commensurable.

$\frac{dv}{dt}$ est essentiellement négative ; donc la vitesse diminue, $v < v_0$, ce qui est nécessaire pour que le temps t soit positif. Elle diminue jusqu'à ce qu'elle s'annule ; à ce moment, le mobile sera arrivé en un p. A : on fera $v = 0$ dans les intégrales pour avoir l'instant où le mobile est en A et la hauteur de ce p. A partir de cet instant, le mobile se comporte comme s'il était abandonné à son poids en A sans vitesse initiale. Le mouvement de chute suivra dès lors la loi formulée dans le cas précédent. Il

repassera par les mêmes points, mais sa vitesse ne sera pas la même qu'en montant dans les mêmes positions ; elle sera inférieure.

Pour montrer que ce second mouvement de retour ne dépend plus des formules relatives à la résistance, considérons un mobile lancé dans un tube horizontal plein d'air ; à la résistance de l'air s'ajoute le frottement sur les parois du tube, qui est sensiblement constant ; la résistance totale sera donc encore : $R = m(h + kv^n)$

Il n'y a plus à tenir compte du poids du mobile, non plus que de la réaction normale du tube, qui se détruisent mutuellement. L'équation du mouvement sera donc : $\frac{dv}{dt} = -(h + kv^n)$

Le mouvement sera le même que celui d'un p. pesant ascendant ; mais quand le mobile sera arrivé au p. A où : $v = 0$, aucune force n'agissant plus sur lui, il y restera en équilibre stable. On peut calculer comme ci-dessus l'instant auquel il s'arrête, et la distance du p. A où il s'arrête, à l'origine.

Si le frottement est nul, on fera : $h = 0$, et on trouvera que si : $n < 1$, le mobile s'arrête à une distance finie et en un temps fini ; si $n \geqslant 1$, il continue indéfiniment à se mouvoir dans le même sens.

Mouvement curviligne d'un point matériel.

Examinons d'abord le cas particulier simple où la force est constamment parallèle à une direction fixe, par ex. l'axe Oz. On sait que la trajectoire du mobile se trouvera dans un plan parallèle à Oz ; en effet, les équations du mouvement sont : $m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ $m\frac{d^2y}{dt^2} = 0$.

d'où : $\frac{dx}{dt} = A$ $\frac{dy}{dt} = B$ $B\,dx - A\,dy = 0$ $Bx - Ay = C$.

équation d'un plan parallèle à Oz. Si l'on connait la position initiale M_0 du p. mobile, et sa vitesse initiale v_0, on connaîtra le plan de la trajectoire, à moins que v_0 ne soit parallèle à Oz; mais on sait qu'alors le point décrit la parallèle à Oz passant par M_0, et on rentre dans le cas du mouvement rectiligne.

Prenons donc pour plan des xy le plan de la trajectoire; la force étant parallèle à l'axe Oy, on a les équations du mouvement.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

Dans le cas le plus général: $Y = \varphi\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, t\right)$

Or la 1e équation donne, en intégrant: $\frac{dx}{dt} = A \qquad x = At + B$

La 2e devient: $m\frac{d^2y}{dt^2} = \psi\left(y, \frac{dy}{dt}, t\right)$

c'est l'équation différentielle la plus générale du 2e ordre. Elle définit le mouvement rectiligne de la projection P du p. mobile M sur Oy; on est ainsi ramené au cas du mouvement rectiligne (combiné avec une translation uniforme suivant Ox) et l'on n'a qu'à appliquer les conclusions de la théorie précédente aux divers cas qui peuvent se présenter.

Dans le cas particulier où: $Y = \varphi(y)$

il y a une fonction des forces, qui fournit une intégrale première en vertu du théorème des forces vives: $\frac{mv^2}{2} = \int \varphi(y)\, dy + h$

On obtiendra ainsi la vitesse avant de connaître la trajectoire. — Les surfaces de niveau sont les plans perpendiculaires à Oz; $y = \text{const.}$

Nous allons passer en revue quelques exemples de mouvement curviligne

Mouvement d'un point pesant dans le vide

Prenons pour axe des y une verticale dirigée vers le haut : $Y = -mg$

Intégrale des forces vives : $\frac{mv^2}{2} = -mgy + h$

On détermine h par les conditions initiales : $h = \frac{mv_0^2}{2} + mgy_0$

$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = -g(y - y_0)$ formule qui donne la vitesse.

On voit que la vitesse est la même en valeur absolue chaque fois que le point mobile repasse à la même hauteur.

Prenons pour origine la position initiale et pour Ox l'horizontale du côté où le mobile est lancé ; soit α l'angle que fait la vitesse initiale avec Ox $(\alpha < \frac{\pi}{2})$ – Les équations du mouvement sont :

$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ D'où, en intégrant et en déterminant les constantes :

$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$ $\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha$ Intégrons encore :

$x = v_0 t \cos\alpha$ $y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha$

Les constantes d'intégration sont nulles, puisque x et y sont nulles pour $t = 0$. Telles sont les équations du mouvement en termes finis. Pour obtenir la trajectoire, on éliminera le temps :

$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ $y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha$

On a bien en effet à l'origine : $y = x \operatorname{tg}\alpha$

On voit que la trajectoire est une parabole d'axe vertical. Le p. mobile ne passe par le sommet que si $\alpha > 0$. Dans ce cas, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 > 0$

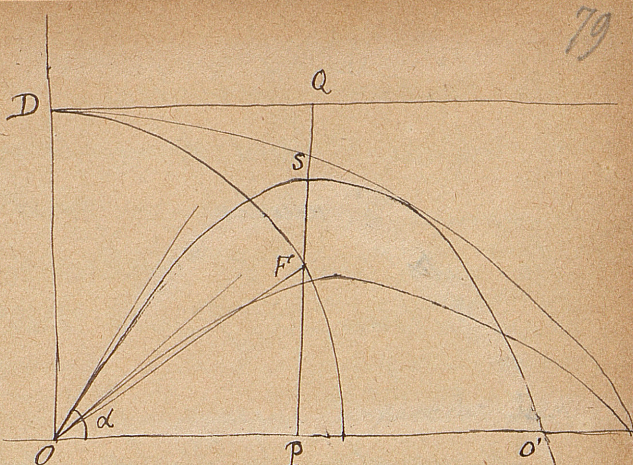
Donc y commence par croître, jusqu'à ce que $\frac{dy}{dt} = 0$, ce qui arrive à l'instant : $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$.

A partir de cet instant, $\frac{dy}{dt} < 0$, le mobile redescend. Les coordonnées du sommet sont : $y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

$x_1 = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$

Le mobile revient couper Ox en O' :

$OO' = 2x_1 = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$



OO' s'appelle la portée horizontale. Si v_0 est donné fixe, la portée horizontale est maxima pour $\alpha = 45^\circ$.

Si on lance le mobile avec la même vitesse initiale sous des angles différents, on obtient une famille de paraboles ayant même directrice.

En effet, on sait que pour la parabole : $y = Ax^2 + Bx + C$ le paramètre est $\frac{1}{2A} = p$. Ici : $p = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$

$PQ = y_1 + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2g}$ hauteur de la directrice, indépendante de α.

Soit D le point de Oy déterminé par : $OD = \frac{v_0^2}{2g}$

c'est le point où la directrice coupe Oy ; c'est aussi le point où monte le projectile lancé verticalement avec la vitesse initiale v_0. Dans ce cas limite, la parabole est infiniment aplatie, elle se réduit à OD, et son sommet se trouve sur sa directrice. — On sait que dans la parabole : $OF = OD$, donc le lieu des foyers F est une circonférence de centre O et de rayon OD.

Pour déterminer le foyer quand on donne α, il suffit de doubler l'angle DOv_0, car la tangente en O est bissectrice de OD, OF : $v_0OF = DOv_0$. Connaissant le foyer et la directrice, on pourra construire

la trajectoire parabolique

Problème : Étant donné la vitesse initiale v_0, déterminer l'angle α de manière à atteindre un point P donné (x, y).

On substituera les coordonnées (x, y) de ce point dans les équations et on en tirera α ; prenons pour inconnue : $u = tg\,\alpha$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + u^2 \qquad y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}(1+u^2) + ux$$

Cette équation du 2e degré donnera u en fonction de x, y donnés.

$$gx^2u^2 - 2v_0^2xu + 2v_0^2y + gx^2 = 0$$

Il faut que les racines soient réelles : $v_0^4x^2 - gx^2(2v_0^2y + gx^2) \geqslant 0$

ou simplement : $v_0^4 - g^2x^2 - 2v_0^2gy \geqslant 0$.

ou encore : $-g^2x^2 - 2v_0^2g\left(y - \frac{v_0^2}{2g}\right) \geqslant 0$.

Cette condition partage le plan en 2 régions, séparées par la courbe qui a pour équation : $x^2 = -\frac{2v_0^2}{g}\left(y - \frac{v_0^2}{2g}\right)$

C'est une parabole qui a pour sommet : $x = 0$, $y = \frac{v_0^2}{2g}$,

c.à.d. le point D. Son axe est vertical, et son foyer est O ;

car : $OD = \frac{v_0^2}{2g}$ qui est le demi-paramètre de la parabole.

Ainsi pour qu'on puisse atteindre le point P, il faut et il suffit qu'il soit à l'intérieur de cette parabole. En général, il y aura 2 solutions ; mais si le p. P est sur la parabole même, il n'y en a qu'une, qui correspond à la racine double en u.

Cette parabole de sûreté est l'enveloppe des trajectoires issues du p. O. En effet, l'équation des trajectoires est : $y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}(1+u^2) + ux$

où u a la valeur fixe $tg\,\alpha$ pour chacune d'elles. Si l'on fait varier α, ou u, pour trouver l'enveloppe, il faut égaler à 0 la dérivée

de cette équation et éliminer la variable entre les deux équations, ce qui revient à écrire l'équation qui donne les racines doubles (puisque toute racine double annule la dérivée première.)

Ainsi le problème de mécanique précédent revient à un problème de géométrie : Mener par 2 points donnés O, P une parabole ayant une directrice donnée. La question comporte 0, 1, ou 2 solutions suivant que le p. P est en dehors de, sur ou en dedans de la parabole qui a pour foyer O et pour tangente au sommet la directrice donnée. Il y a d'ailleurs réciprocité parfaite entre les points O et P.
On vérifie sur cet exemple particulier la proposition énoncée (page 61) savoir que lorsqu'on détermine un mouvement en assujettissant le mobile à passer par 2 points donnés, on obtient en général plusieurs solutions.

— Mouvement d'un point pesant dans le air.
Ce mouvement diffère beaucoup de celui d'un point pesant dans le vide : au lieu d'être parabolique, la trajectoire a une asymptote verticale, et le mouvement tend à devenir rectiligne et uniforme.

La résistance de l'air ne pouvant s'exercer sur un point matériel, considérons un projectile sphérique en mouvement : il est soumis à son poids <u>mg</u> et aux résistances de l'air sur sa surface, qui se réduisent à une résultante R appliquée en son centre de gravité et à un couple. En vertu du théorème du centre de gravité, le centre de la sphère se meut comme un point matériel de masse <u>m</u> auquel seraient appliquées les forces qui s'exercent sur le corps, c.à d. <u>mg</u> et R (le couple s'annule quand on transporte les 2 forces au même point.) Le couple n'a d'autre effet que de faire tourner le corps

autour de son centre ; on est donc ramené à étudier le mouvement d'un point pesant soumis à une résistance R.

Si le projectile est symétrique par rapport au plan vertical mené par la vitesse du centre de gravité, la résistance R sera située dans ce plan, et le mouvement s'effectuera dans ce plan. Nous supposerons donc que le mobile ne tourne pas, car la rotation détruit la symétrie mécanique : la résistance ne serait plus dans le plan vertical de la vitesse et en ferait sortir le projectile (ce qui arrive par exemple avec les armes à feu rayées.) — Nous allons prouver que dans ces conditions la trajectoire est plane.

En effet, les équations du mouvement seront alors :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = R_x \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = R_y \qquad \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}} = \frac{R_y}{R_x}$$

Or les projections horizontales (sur le plan des xy) de R et de la vitesse ont par hypothèse même direction ; donc :

$$\frac{R_y}{R_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad \text{d'où :} \qquad \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}}$$

en intégrant : $\log\frac{dy}{dt} = \log\frac{dx}{dt} + \log C \qquad \frac{dy}{dt} = C\frac{dx}{dt}$

intégrons encore une fois : $y = Cx + C'$

équation d'un plan vertical — Ce plan sera déterminé par la vitesse initiale, sauf le cas où cette vitesse est verticale ; le mouvement est alors rectiligne — Prenons alors ce plan pour plan des xy, et prenons pour Ox l'horizontale dans le sens où est lancé le mobile à partir du pt O : soit V_0 la vitesse initiale, α_0 l'angle qu'elle fait avec Ox.

$-\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < +\frac{\pi}{2}$ — Dans une position quelconque M, le mobile est soumis à son poids mg, et à une résistance que nous supposerons directement opposée à sa vitesse, donc tangente à la trajectoire en M ; posons : $R = m\varphi(v)$

φ étant une fonction croissant avec v. — Nous allons employer les équations intrinsèques du mouvement : on sait qu'on a dans l'espace la relation fondamentale de la dynamique : $(F) = m(J)$

Elle subsiste entre les projections de la force et de l'accélération sur des axes quelconques, par exemple sur la tangente et la normale à la trajectoire en M. — Ici, F est la résultante du poids et de la résistance R : elle doit être dans la concavité de la trajectoire, ce qui prouve que cette concavité est tournée vers le bas : donc, si l'on appelle α l'angle variable que fait la tangente avec l'horizontale Ox, cet angle α diminue constamment en valeur algébrique. Prenons-le comme inconnue auxiliaire ; l'angle de la tangente MT avec l'horizon est aussi l'angle de la normale MN avec le poids, c.à.d. α. On sait que l'accélération a pour projections sur la tangente : $\frac{dv}{dt}$, et sur la normale : $\frac{v^2}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure en M

Donc : $mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{\rho}$ $\quad -mg\sin\alpha - m\varphi(v) = m\frac{dv}{dt}$

ou : $g\cos\alpha = \frac{v^2}{\rho}$ $\quad g\sin\alpha + \varphi(v) = -\frac{dv}{dt}$

Telles sont les équations intrinsèques du mouvement. On peut remplacer ρ par $-\frac{ds}{d\alpha}$, car ρ étant essentiellement positif, il faut changer le signe de $\frac{ds}{d\alpha}$ qui est constamment négative ; on écrira :

$\rho = -\frac{ds}{dt}\frac{dt}{d\alpha} = -v\frac{dt}{d\alpha}$ d'où : $g\cos\alpha = -\frac{v\,d\alpha}{dt}$

Ces 2 équations détermineront 2 des quantités : α, v, t en fonction de l'une d'elles. Éliminons le temps ; on aura l'éq. :

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\alpha + \frac{\varphi(v)}{g\cos\alpha} = \frac{dv}{v\,d\alpha}$$

équation différentielle du 1er ordre ; on en tirera, en intégrant, v en fonction de α : $\quad v = \psi(\alpha)$

On aura le temps par la formule $\quad dt = -\dfrac{v\,d\alpha}{g\cos\alpha}$

d'où, par une quadrature : $\quad t = -\dfrac{1}{g}\displaystyle\int_{\alpha_0}^{\alpha} \dfrac{v\,d\alpha}{\cos\alpha}$

On aura aussi x, y en fonction de α : $\quad \dfrac{dx}{dt} = v\cos\alpha \quad \dfrac{dy}{dt} = v\sin\alpha$

d'où les 2 quadratures :

$$dx = v\cos\alpha\,dt = -\frac{v^2}{g}\,d\alpha \qquad x = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2\,d\alpha$$

$$dy = v\sin\alpha\,dt = -\frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\alpha\,d\alpha \qquad y = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2\operatorname{tg}\alpha\,d\alpha$$

On a donc x, y, t par des quadratures en fonction de α ; la seule difficulté consiste à calculer v. Géométriquement, quand v est donné en fonction de α, on a tout de suite l'équation intrinsèque de la courbe, c.à.d. ρ en fonction de α : $\quad \rho = \dfrac{v^2}{g\cos\alpha}$

Le problème revient donc à intégrer l'équation (1.)

Pour cela nous supposerons que la résistance est une fonction de la forme : $\quad R = m(h + kv^n) \qquad$ où $\quad h < g$

Posons : $\quad \dfrac{h}{g} = a \qquad \dfrac{k}{g} = b \qquad$ On a donc : $\quad a < 1.$

L'équation (1) devient : $\quad \dfrac{dv}{v\,d\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \dfrac{a + bv^n}{\cos\alpha}$

On peut ramener cette équation différentielle à la forme linéaire :

$$\frac{dv}{v^{n+1}\,d\alpha} = \frac{1}{v^n}\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{a}{\cos\alpha}\right) + \frac{b}{\cos\alpha}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{v^n}\right) = \frac{-n}{v^n}\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{a}{\cos\alpha}\right) - \frac{nb}{\cos\alpha}$$

équation linéaire en $\frac{1}{v^n}$. Pour l'intégrer, posons : $\frac{1}{v^n} = pq$:

$$p\frac{dq}{d\alpha} + q\frac{dp}{d\alpha} = -npq\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{a}{\cos\alpha}\right) - \frac{nb}{\cos\alpha}$$

Disposons de q de manière à annuler le coefficient de p :

$$\frac{dq}{d\alpha} = -nq\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{a}{\cos\alpha}\right) \qquad \frac{dq}{q} = -n\operatorname{tg}\alpha\,d\alpha - \frac{na}{\cos\alpha}\,d\alpha$$

Intégrons ; $\log q = n\log\cos\alpha - na\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$

Comme nous ne cherchons pas la valeur générale de q, mais seulement une valeur particulière vérifiant l'équation différentielle précédente, nous pouvons, pour simplifier, négliger la constante d'intégration.

Passons des logarithmes aux nombres : $q = \dfrac{\cos^n\alpha}{\operatorname{tg}^{na}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}$

q étant ainsi déterminé, l'équation qui donne p se réduit à : $q\dfrac{dp}{d\alpha} = -\dfrac{nb}{\cos\alpha}$ ou :

$$\frac{dp}{d\alpha} = -\frac{nb}{q\cos\alpha} \qquad \text{d'où :} \qquad p = p_0 - \int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{nb\,d\alpha}{q\cos\alpha}$$

On a ainsi p par une quadrature, et on obtiendra : $v^n = \dfrac{1}{pq}$.

Pour $\alpha = \alpha_0$, on a la valeur initiale : $\dfrac{1}{v_0^n} = p_0 q_0$

On connaît q_0 ; on aura donc : $p_0 = \dfrac{1}{q_0 v_0^n}$; l'expression de p devient :

$$\frac{1}{qv^n} = \frac{1}{q_0 v_0^n} - \int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{nb\,d\alpha}{q\cos\alpha} \qquad \frac{1}{v^n} = \frac{q}{q_0 v_0^n} - q\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{nb\,d\alpha}{q\cos\alpha}$$

On aura ainsi v en fonction de α par une quadrature.
Nous savons déjà que α diminue constamment; on a d'ailleurs:
$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{g\cos\alpha}{v} \quad \text{et toujours:} \quad \cos\alpha > 0.$$
Quand α diminue en partant de $\alpha_0 > 0$, y commence par croître
$$\frac{dy}{d\alpha} = -\frac{v^2}{g}\,tg\,\alpha \quad \text{jusqu'à ce que} \quad \alpha = 0.$$
Alors y passe par un maximum: $y_1 = \frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{0} v^2\,tg\,\alpha\, d\alpha$
Puis, α devenant négatif, y diminue indéfiniment.
D'autre part, x augmente constamment: $\frac{dx}{d\alpha} = -\frac{v^2}{g}$;
mais quand α tend vers $-\frac{\pi}{2}$, v tend vers une limite, et x aussi.
En effet, q tend alors vers 0: $\quad q = \frac{\cos^n\alpha}{tg^{na}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)} \quad n > na$
En même temps, l'intégrale
$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{nb\,d\alpha}{q\cos\alpha}$$ devient infinie pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, même si q restait fini.
Ainsi l'expression de $\frac{1}{v^n}$ prend la forme $0 \times \infty$, ou
$\frac{\infty}{\infty}$ en l'écrivant: $\dfrac{\int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{nb\,d\alpha}{q\cos\alpha}}{\frac{1}{q}}$ Prenons les dérivées
des 2 termes:
$$\frac{\frac{nb}{q\cos\alpha}}{-\frac{1}{q^2}\frac{dq}{d\alpha}} = \frac{-nb}{\frac{1}{q}\frac{dq}{d\alpha}\cos\alpha}$$
Or: $\frac{1}{q}\frac{dq}{d\alpha} = -n\,tg\,\alpha - \frac{na}{\cos\alpha}$
$\frac{1}{q}\frac{dq}{d\alpha}\cos\alpha = -n\sin\alpha - na$ qui tend vers: $(n - na)$ pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.
Donc: $\lim \frac{1}{v^n} = \frac{b}{1-a}$ puisque $\lim \frac{q}{q_0 v_0^n} = 0$.
ou: $\lim \frac{1}{v^n} = \frac{k}{g-h} \quad \lim v^n = \frac{g-h}{k} \quad \lim v = \left(\frac{g-h}{k}\right)^{\frac{1}{n}}$

Nous retrouvons pour la vitesse, comme on devait s'y attendre, la même limite que dans la chute verticale. — Quant à x, on a :

$x = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 d\alpha$ puisque l'élément différentiel reste fini pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, x a une valeur finie, c.à.d. tend vers une limite quand α tend vers $-\frac{\pi}{2}$. Il y a donc une asymptote verticale à la trajectoire.

Enfin, pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $t = +\infty$, c.à.d. que v et x n'atteignent jamais leurs limites : en effet : $t = -\frac{1}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v\,d\alpha}{\cos\alpha}$

Puisque v reste finie, on peut lui substituer une constante K : alors :

$t > -\frac{K}{g}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$ donc $t > -\frac{K}{g}\log tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

qui devient infini pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; cette limite est positive. En résumé, le mouvement de chute tend à devenir rectiligne (vertical) et uniforme.

On pourra encore intégrer les équations du mouvement quand la résistance a la forme : $R = h + k\log v$

En prenant $\log v$ pour inconnue, on aura une équation linéaire qui donne v en fonction de α.

On trouve des équations de même forme quand on cherche le mouvement d'un point matériel sur un plan incliné, en tenant compte de la résistance de l'air et du frottement, considéré comme une force constante opposée à la vitesse. La pesanteur n'agit que par sa composante $g\sin\alpha$, de sorte que si α est assez petit, on peut avoir : $h > g$ ou : $a > 1$.

Le mobile s'arrêtera alors au bout d'un temps fini.

Théorème des moments de la quantité de mouvement d'un point.

Un point en mouvement a à chaque instant une vitesse v représentée par un vecteur MV ; on appelle quantité de mouvement de ce point au même instant un vecteur de même direction et de même sens égal à mv ; il aura donc pour projections :

$$m\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{dy}{dt}, \quad m\frac{dz}{dt}.$$

Les moments de ce vecteur par rapport aux 3 axes seront par suite :

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right), \quad m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right), \quad m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)$$

c.à.d. les moments du vecteur MV (vitesse) multipliés par m

Sur les équations du mouvement :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

faisons la combinaison qui donne les moments de la force par rapport aux 3 axes ;

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = xY - yX$$

Le 1er membre est encore une dérivée exacte, et peut s'écrire ;

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right] = xY - y.X$$

d'où la proposition suivante :

La dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement du point par rapport à un axe est égale au moment de la force par rapport au même axe.

On peut rapprocher ce théorème de celui qu'on pourrait conclure des équations du mouvement, mises sous la forme $\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X$

La dérivée par rapport au temps de la projection de la quantité de

mouvement sur un axe est égal à la projection de la force sur cet axe.

Le théorème du moment de la quantité de mouvement fournit une intégrale première du mouvement, quand le moment de la force par rapport à un certain axe est constamment nul. Prenons cet axe pour axe des z; on aura en intégrant: $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$

Le moment de la vitesse est constant, donc il est connu, car il est égal au moment de la vitesse initiale.

Cette intégrale première a une signification géométrique importante, qui peut s'énoncer sous forme de théorème:

La projection du p. mobile sur le plan des xy se meut autour de O suivant la loi des aires.

Soit P cette projection; elle part de $P_0(x_0y_0)$ et décrit une courbe dans le plan des xy; le rayon vecteur OP engendre en tournant un secteur P_0OP dont l'aire varie proportionnellement au temps, car:

$ds = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ $\quad 2\frac{ds}{dt} = C$ $\quad 2s = Ct + C'$

et si l'on compte les aires à partir de t_0, $\quad 2s = C(t - t_0)$

La constante des aires C est égale au double de l'aire engendrée pendant l'unité de temps. Suivant le signe de C, le rayon vecteur OP tourne constamment dans un sens ou dans l'autre autour de O, et par suite le point M dans l'espace tourne dans le même sens autour de l'axe Oz.

— Application au cas particulier d'un point matériel sollicité par une force centrale.

Prenons pour origine le centre O de la force; le moment de la quantité de mouvement par rapport à chacun des 3 axes est constant, puisque

les moments de la force par rapport aux mêmes axes sont nuls :

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = A \qquad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = B \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$$

On en conclut, en multipliant ces 3 égalités respectivement par x, y, z :

$$Ax + By + Cz = 0$$ équation d'un plan passant par O.

Donc : Quand la force est centrale, la trajectoire est dans un plan qui passe par le ~~origine~~ centre.

Ce plan est déterminé par la vitesse initiale V_0, à moins que cette vitesse ne coïncide avec le rayon vecteur ; mais alors le mouvement serait rectiligne. A, B, C sont nuls dans ce cas ; car les moments de la vitesse par rapport aux 3 axes sont nuls.

Théorie des forces centrales.

Nous allons d'abord étudier le cas particulier suivant, qui peut se traiter à part :

Mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance.

On sait que la trajectoire est dans un plan passant par le centre O ; dans ce plan prenons des axes quelconques Ox, Oy : la force dirigée suivant le rayon vecteur a pour expression : $F = -mk^2 r$

d'où les équations du mouvement : $\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 y$

Ce qui simplifie le problème, c'est qu'on peut intégrer séparément ces 2 équations linéaires du 2e ordre sans terme constant ; on les a déjà rencontrées dans le mouvement rectiligne pour la même loi de force ; on trouve :

$$x = A\cos kt + B\sin kt \qquad y = A'\cos kt + B'\sin kt$$

Le mobile décrit une courbe fermée, puisque x, y sont périodiques : quand t augmente de la période $T = \frac{2\pi}{k}$,

(T est indépendant de r, c.à.d que la durée de la révolution est la même pour tous les points attirés par le même centre suivant la même loi ; cf. tautochronisme du mouvement rectiligne page 70.)

il repasse au même point avec la même vitesse. Cette trajectoire est une ellipse ayant pour centre le centre attractif O, car on tire de ces équations : $\cos kt = ax + by$ $\qquad \sin kt = a'x + b'y$

d'où : $(ax+by)^2 + (a'x+b'y)^2 = 1.$

c'est l'équation d'une conique qui a pour centre l'origine et cette conique est une ellipse, puisque le 1[er] membre est positif (somme de carrés)

Nous pouvons, sans particulariser les données du problème, mais en choisissant seulement les axes, supposer que la position initiale M_0 est sur Ox à la distance r_0 de O (rayon vecteur initial) et que la vitesse initiale v_0 est parallèle à Oy, puisque nous admettons les axes obliques (si v_0 coïncidait avec Ox, on rentrerait dans le cas du mouvement rectiligne.) Avec ces conditions initiales, on trouve aisément :

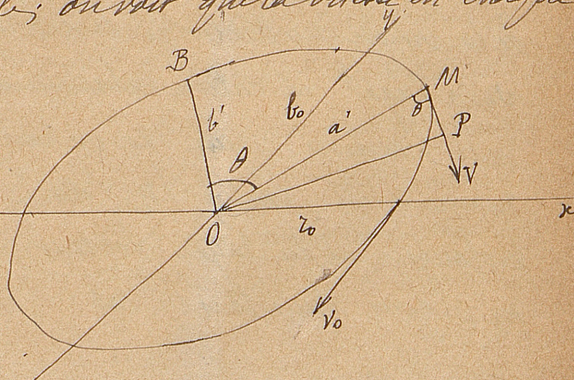
$A = r_0 \qquad B = 0 \qquad A' = 0 \qquad B'k = v_0$

d'où les équations : $\quad x = r_0 \cos kt \qquad y = \dfrac{v_0}{k} \sin kt$

qui représentent l'ellipse : $\quad \dfrac{x^2}{r_0^2} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{v_0}{k}\right)^2} = 1$

rapportée à 2 diamètres conjugués de longueurs $2a_0$, $2b_0$: $\quad a_0 = r_0 \qquad b_0 = \dfrac{v_0}{k}. \quad v_0 = kb_0.$

Cette dernière formule donne la loi de la vitesse sur la trajectoire : car on peut prendre un point quelconque pour position initiale et la vitesse en ce point pour vitesse initiale ; on voit que la vitesse en chaque point de la trajectoire est proportionnelle au diamètre parallèle.



Nous savons d'autre part que le mouvement se fait suivant la loi des aires ; vérifions-le. Soit OB le diamètre conjugué de OM, faisant

avec lui l'angle θ; le moment de la vitesse par rapport à O doit être constant; or ce moment est: $k a' b' \sin\theta$ $(v = kb')$

C'est bien une constante, car c'est le parallélogramme $(OP = a' \sin\theta)$ des 2 diamètres conjugués, qui, en vertu d'un théorème d'Apollonius, est égal au rectangle des 2 axes: kab.

En appliquant le théorème des forces vives, $\frac{v^2 - v_0^2}{2} = -\frac{k^2}{2}(r^2 - r_0^2)$

d'où: $b'^2 - b_0'^2 = -(r^2 - r_0^2) = -(a'^2 - a_0'^2)$ $\quad a'^2 + b'^2 = a_0'^2 + b_0'^2$

on retrouve un autre théorème d'Apollonius, en vertu duquel la somme des carrés de 2 diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des 2 axes, c.à.d. constante.

< Abordons maintenant le problème général des forces centrales. Nous emploierons les coordonnées polaires, en prenant pour pôle le centre des forces; le rayon vecteur r sera essentiellement positif; la force F aura un signe + ou −, suivant qu'elle sera répulsive ou attractive.

On a d'abord l'intégrale des aires: $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C$ ou: $r^2\frac{d\theta}{dt} = C$

puis, par le théorème des forces vives: $d\frac{mv^2}{2} = F\,dr$

On déterminera la constante des aires, C, par les conditions initiales. C'est le moment de la vitesse initiale par rapport au centre O, pris avec son signe; cette constante est donc bien déterminée. Soit η_0 l'angle de la vitesse initiale v_0 avec le rayon vecteur r_0 prolongé; le moment sera égal en valeur absolue à: $v_0 r_0 \sin\eta_0$

mais ce sera aussi sa valeur algébrique, car $\sin\eta > 0$ quand le moment est positif (η_0 étant compté dans le sens positif à partir du prolongement du rayon vecteur), et $\sin\eta < 0$ quand le moment est négatif; on a donc dans tous les cas: $C = v_0 r_0 \sin\eta_0$

On a d'autre part la formule : $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2}$

où l'on peut remplacer $d\theta$ ou dt par son expression en C ; on a ainsi :

$$v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{C^2}{r^2} \qquad \text{et} \qquad v^2 = C^2\left[\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2\right]$$

On peut ramener l'intégration des équations du mouvement aux quadratures quand la force ne dépend que de la distance : $F = \varphi(r)$

Cela tient à ce qu'il y a alors une fonction des forces, et on a l'intégrale des forces vives : $\frac{mv^2}{2} = \int \varphi(r)\,dr + h$ d'où : $v^2 = \psi(r)$.

Si l'on veut une relation entre r et t, on emploiera la 1e formule :

$$v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{C^2}{r^2} \qquad dt = \frac{dr}{\pm\sqrt{\psi(r) - \frac{C^2}{r^2}}} \qquad t = \int \frac{dr}{\pm\sqrt{\psi(r) - \frac{C^2}{r^2}}}$$

On aura ainsi t en fonction de r ; si l'inversion de l'intégrale est possible, on pourra tirer r en fonction de t. En tout cas, cette intégrale permet d'étudier le mouvement relatif du point mobile sur son rayon vecteur, comme un mouvement rectiligne.

Si l'on veut une relation entre r et θ, on emploiera la 2e formule :

$$d\theta = \frac{C\,dt}{r^2} = \frac{C\,dr}{\pm r^2\sqrt{\psi(r) - \frac{C^2}{r^2}}} \qquad \theta = \int \frac{C\,dr}{\pm r^2\sqrt{\psi(r) - \frac{C^2}{r^2}}}$$

On aura ainsi θ en fonction de r, c.à.d. l'équation de la trajectoire.

Dans ces 2 dernières quadratures, une difficulté provient du signe du radical, qui ne peut être indéterminé, puisque le mouvement est unique et bien déterminé. Or on connaît le signe de $\frac{dr}{dt}$ à l'instant initial ; c'est la projection de la vitesse initiale sur le rayon vecteur : elle est positive si la vitesse initiale tend à éloigner le mobile de l'origine ($\cos\eta > 0$)

négative si elle tend à la rapprocher ($\cos\eta < 0$). On prendra ce signe pour le radical et on suivra par ~~continuité~~ cette détermination dans les 2 intégrales, jusqu'à ce que le radical s'annule. Dans ce cas, qui peut se présenter dès le début, si la vitesse initiale est perpendiculaire au rayon vecteur ($\cos\eta = 0$, $\frac{dr}{dt} = 0$), r_0 est racine de l'équation :

$\varphi(r) = \frac{C^2}{r^2}$ En discutant cette équation, on prendra les valeurs de r voisines de r_0 qui rendent positive la quantité soumise au radical. Nous compléterons tout à l'heure ces indications.

— Supposons maintenant que la force soit quelconque. On a toujours l'équation des forces vives : $d\,\frac{mv^2}{2} = F dr$

Remplaçons-y v^2 par son expression en fonction de r, t :

$$d\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{C^2}{r^2}\right)\right] = F dr \qquad m\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{mC^2}{r^3}\frac{dr}{dt} = F\frac{dr}{dt}$$

d'où : $$m\frac{d^2r}{dt^2} = F + m\frac{C^2}{r^3}$$

formule utile dans les problèmes où F est fonction de r et t. Elle admet une interprétation simple : cette équation définit en effet le mouvement relatif du point matériel sur le rayon vecteur. Elle montre que ce mouvement est le même que le mouvement rectiligne d'un point sollicité suivant un axe fixe par la force centrale $F + m\frac{C^2}{r^3}$.

Dans le cas où $C=0$, les 2 mouvements sont identiques, la force fictive (dans le mouvement relatif) se réduisant à la force réelle F ; mais aussi le rayon vecteur ne tourne pas, et le mouvement réel est rectiligne.

Dans le cas particulier où l'on a simplement $F = \varphi(r)$

l'équation devient : $$m\frac{d^2r}{dt^2} = \varphi(r) + \frac{mC^2}{r^3}$$

Elle permet d'étudier le mouvement relatif sur son rayon vecteur, d'un point

soumis à une force centrale qui ne dépend que de la distance du centre. On retrouverait les intégrales précédentes.

Cette équation permet de déterminer dans tous les cas le signe du radical, c.à.d. de $\frac{dr}{dt}$, vitesse relative du point mobile sur son rayon vecteur. En effet dans tous les cas où la vitesse, initiale ou non, est nulle, on connaît la force, et par conséquent le sens dans lequel le point se meut sur le rayon vecteur : car c'est le sens de la force fictive : $F + m\frac{C^2}{r^3}$ qui régit son mouvement relatif.

Un seul cas fait exception à cette règle : celui où cette force fictive serait nulle à l'instant initial : $F_0 + m\frac{C^2}{r_0^3} = 0$

Mais alors le point matériel reste immobile sur le rayon vecteur : il décrit un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon r_0. La vitesse est d'ailleurs constante, car r étant constant, on a, en vertu de la loi des aires : $\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} = \text{const}$.

La force est nécessairement négative, c.à.d. attractive, dans ce cas (puisque d'ailleurs elle est tournée vers la concavité de la trajectoire) :

$$F = -m\frac{C^2}{r^3}$$

Si la force attractive est fonction de la distance, on peut toujours disposer des conditions initiales de telle sorte que le mobile décrive un cercle ayant pour centre l'origine.

Remplaçons maintenant dans l'équation des forces vives, v^2 par son expression en fonction de r et θ :

$$d\left[\frac{mC^2}{2}\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right]\right] = F dr \qquad mC^2\left[\frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta}\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta}\right] = F\frac{dr}{d\theta}$$

or : $\frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta} = \frac{-1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$

$$-\frac{mC^2}{r^2}\left[\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right] = F.$$

On peut vérifier cette formule dans un cas simple : si la force est nulle le mobile doit décrire une ligne droite avec une vitesse constante. En effet, on a l'équation différentielle : $\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = 0$

dont la solution générale est : $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ d'où :

$Ax + By = 1$ équation générale d'une droite.

En général, le mobile décrira une courbe, dont la concavité sera déterminée par le signe de $\frac{1}{r} + \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2}$, puisque F est toujours dans la concavité : si ce signe est +, la courbe tournera sa concavité vers l'origine.

De cette formule nous pouvons tirer comme conséquence un :

Théorème de Jacobi. Le problème se ramène aux quadratures quand la force est une fonction de la forme : $F = \frac{\varphi(\theta)}{r^2}$, ou (en coordonnées cartésiennes) quand F est une fonction homogène du degré -2 en (x, y).

En effet, l'équation précédente devient : $\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{\varphi(\theta)}{mC^2}$ équation linéaire du 2e ordre à coefficients constants avec second membre.

On l'intègre d'abord sans 2e membre : $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$

Puis on ajoute à cette intégrale une solution particulière de l'équation avec 2e membre, soit $\psi(\theta)$; la solution générale est alors :

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta + \psi(\theta)$$

On peut d'ailleurs trouver la solution particulière $\psi(\theta)$ par des quadratures.

Le cas le plus simple auquel on puisse appliquer cette proposition est celui d'un point matériel attiré suivant la loi de Newton ; c'est le cas où : $\varphi(\theta) = \text{const.}$ $F = -\frac{m\mu}{r^2}$ $\mu > 0$.

L'équation de la trajectoire est alors : $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}$

dont l'intégrale générale est : $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta + \frac{\mu}{C^2}$

$\frac{\mu}{C^2}$, constante, étant évidemment une solution particulière. C'est l'équation d'une conique ayant pour foyer l'origine : en effet, l'équation d'une conique rapportée à son foyer comme pôle est :

$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}$ $\qquad \frac{1}{r} = \frac{e}{p}\cos(\theta - \alpha) + \frac{1}{p}$

En identifiant cette expression à l'intégrale précédente, on calculera les 3 constantes A, B, C en fonction de α, e, p :

$A = \frac{e}{p}\cos\alpha \qquad B = \frac{e}{p}\sin\alpha \qquad C = \sqrt{\mu p}$.

On résoudra de la même manière le problème de Clairaut, où la loi de force est : $\qquad F = m\left(\frac{k}{r^2} + \frac{h}{r^3}\right)$

(formule proposée par Clairaut pour expliquer le mouvement de la lune)

On retrouve les mêmes équations, seulement $\frac{1}{r}$ a un coefficient différent de 1, qui affecte θ dans l'intégrale générale.

La formule : $\qquad F = -\frac{mC^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right]$

permet encore de résoudre le problème suivant :

Problème. Un mobile décrit une courbe donnée suivant la loi des aires autour d'un centre O ; trouver la loi de la force qui produit ce mouvement.

Soit : $f(r\,\theta) = 0$ l'équation de cette courbe ; on a d'ailleurs la loi des aires : $r^2\frac{d\theta}{dt} = C$

On peut affirmer que la force est centrale ; car on sait que son moment doit être constamment nul par rapport au centre O pris pour origine
$(xY - yX = 0)$

On a : $\frac{X}{Y} = \frac{x}{y}$, donc la force est dirigée suivant le rayon vecteur.
On peut concevoir que l'on ait : $\frac{1}{r} = \varphi(\theta)$ Alors l'équation devient :

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left[\varphi(\theta) + \varphi''(\theta)\right]$$

Le problème n'est pas déterminé, car au moyen de la relation : $f(r, \theta) = 0$, on peut transformer la loi de force d'une infinité de manières ; par exemple exprimer la force en fonction de θ seul ou de r seul, ce qui donne 2 formes déterminées de la loi ; ou encore lui donner la forme de Jacobi, que nous venons d'écrire. — Or si l'on prend une de ces lois de force, on trouvera un nombre infini de trajectoires qui lui répondront, et leurs équations contiendront 3 constantes arbitraires. — En prenant alors pour ces constantes des valeurs particulières convenables, on devra retrouver la trajectoire proposée. — On obtient donc en général, pour les diverses lois de force, une infinité de familles de courbes très-différentes, mais qui toutes comprennent la trajectoire proposée.

Prenons par exemple la loi de force sous la forme de Jacobi : remarquons que C^2 est ici une constante donnée, tandis que dans l'équation :

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left(\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right)$$

C^2 est une constante arbitraire, que nous appellerons C'^2 ; on aura, en égalant les 2 expressions de la force, l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{C^2}{C'^2}\left[\varphi(\theta) + \varphi''(\theta)\right]$$

dont la solution générale est :

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta + \frac{C^2}{C'^2}\varphi(\theta)$$

car $\frac{C^2}{C'^2}\varphi(\theta)$ est évidemment une solution particulière de cette équation.
On a ainsi l'équation générale des trajectoires qui répondent à cette loi de force, avec 3 constantes arbitraires A, B, C'. Si l'on y fait :

$A = 0$, $B = 0$, $C' = C$, on retrouve : $\frac{1}{r} = \varphi(\theta)$
c.à.d. la trajectoire donnée.

Application au mouvement des planètes autour du soleil.

En mécanique céleste, on étudie séparément le mouvement des centres des planètes autour du soleil et le mouvement de chaque planète autour de son centre. C'est la 1e catégorie de mouvements que nous nous proposons d'étudier.

En vertu du théorème du mouvement du centre de gravité, le centre d'une planète se meut comme si la masse totale de la planète y était réunie et si les forces qui agissent sur la planète lui étaient appliquées. On a donc à étudier le mouvement de ce centre comme d'un point matériel.

Or ce mouvement se fait suivant les lois que Képler a déduites des observations de Tycho-Brahé :

1e Loi : Les planètes décrivent autour du soleil des courbes planes suivant la loi des aires.

On en conclut immédiatement que la force est centrale et passe constamment par le soleil.

2e Loi : Les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe un des foyers.

On peut en déduire la loi de force par la formule précédemment établie :
$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right)$$
Prenons le centre du soleil, S, pour origine ; l'équation de l'orbite elliptique rapportée à son foyer S est : $r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}$
où p est le paramètre de l'ellipse, e son excentricité.

Pour l'ellipse : $e < 1$; pour la parabole : $e = 1$.
Pour l'hyperbole : $e > 1$; mais la formule précédente, où on prend r essentiellement positif, ne donne qu'une branche d'hyperbole tournant sa concavité vers le foyer S. L'autre branche serait représentée par la formule :

$$r = \frac{p}{e\cos(\theta-\alpha) - 1}$$

Prenons donc la formule de l'ellipse sous la forme suivante :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\theta-\alpha) \qquad \text{d'où :} \qquad \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = -\frac{e}{p}\sin(\theta-\alpha)$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = -\frac{e}{p}\cos(\theta-\alpha) \qquad \text{Donc : } F = -\frac{mC^2}{pr^2}$$

Le signe − montre que la force est attractive, ce qui était à prévoir, la trajectoire tournant sa concavité vers le centre ; la formule nous apprend de plus que la force varie en raison inverse du carré de la distance de la planète au soleil. On peut l'écrire :

$$F = -\frac{m\mu}{r^2} \qquad \text{en posant :} \qquad \mu = \frac{C^2}{p}.$$

Cette formule a l'avantage de s'appliquer à toutes les planètes, tandis que la formule de r dépendait de θ, de e et de α, éléments qui varient avec les planètes. On aurait donc pour une 2e planète :

$$F' = -\frac{m'\mu'}{r'^2} \qquad \text{en posant :} \qquad \mu' = \frac{C'^2}{p'}$$

3e Loi : Les carrés des temps des révolutions sidérales des planètes sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.
Soient a, a' les demi-grands axes des orbites de 2 planètes, T, T' les durées respectives de leurs révolutions sidérales, on a :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T'^2}{a'^3}$$

On conclut de cette dernière loi : $\mu = \mu'$.

En effet calculons C et p en fonction des 2 axes a, b :

$$C = \frac{2\pi ab}{T} \qquad C^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \qquad \text{Or :} \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

$$\mu = \frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \qquad \text{On aurait de même :} \quad \mu' = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2}$$

Donc : $\mu = \mu'$. Le coefficient μ est le même pour toutes les planètes, c.à.d. qu'elles obéissent toutes à la même loi de force.

D'où la <u>loi de Newton</u> :

Les planètes se meuvent comme si elles étaient attirées par le soleil en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances au soleil.

Newton a traité le problème inverse : Trouver le mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

On a d'une part, en vertu de la loi des aires : $r^2 d\theta = C dt$

d'autre part, par le théorème des forces vives : $d\frac{mv^2}{2} = -\frac{m\mu}{r^2}dr$

d'où l'intégrale : $v^2 = \frac{2\mu}{r} + h$ où : $h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$.

Cherchons d'abord la trajectoire, c.à.d. une relation entre r et θ.

On a précédemment traité ce problème au moyen de la formule particulière :

$$F = -\frac{mC^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right]$$

Nous allons employer maintenant la méthode générale :

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = C^2\left[\frac{dr^2}{r^4 d\theta^2} + \frac{1}{r^2}\right] = C^2\left[\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right]$$

d'où :

$$C^2\left[\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right] = \frac{2\mu}{r} + h$$



équation différentielle de la trajectoire, qui donnera θ en fonction de r:

$$\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2 = -\frac{1}{r^2} + \frac{2\mu}{C^2}\frac{1}{r} + \frac{h}{C^2}$$

Décomposons le trinôme:

$$-\left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}\right)^2 + \frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}$$

Posons: $\frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2} = \rho\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}$

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}$$

L'équation devient: $\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 1 - \rho^2$

$$d\theta = \pm\frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \qquad \theta - \alpha = \text{arc}\cos\rho$$

On peut, sans diminuer la généralité du résultat, négliger l'autre signe du radical, qui donnerait: $\theta - \alpha = \text{arc}\sin\rho$
et prendre: $\rho = \cos(\theta - \alpha)$
car prendre $\rho = \sin(\theta - \alpha)$ revient à changer la const. α.
On a donc pour l'équation de la trajectoire:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}\cos(\theta - \alpha)$$

On peut négliger ici le signe du radical, car le changer reviendrait à changer le signe du cosinus, c.à.d. à faire tourner l'axe polaire de $\pm\pi$. On reconnait la forme de l'équation d'une conique (rapportée à son foyer):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\theta - \alpha)$$

Ainsi le point mobile décrit une conique ayant pour foyer le centre attractif. — Pour savoir quelle espèce de conique, il faut déterminer les constantes: $p = \frac{C^2}{\mu}$ $\quad \frac{e}{p} = \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}$ $\quad e = \sqrt{1 + \frac{hC^2}{\mu^2}}$

La conique sera déterminée par les valeurs de p, e, et de α qui fixe l'orientation du grand axe. On voit que le genre de la section conique dépend uniquement du signe de h:

Si $h > 0$, $e > 1$ on a une hyperbole.
si $h = 0$, $e = 1$ ——— parabole.
si $h < 0$, $e < 1$ ——— ellipse.

On peut donc obtenir les 3 formes de coniques suivant les conditions initiales. Il faut remarquer que dans le cas où l'on a une hyperbole, il n'y a qu'une branche, celle qui tourne sa concavité vers le pôle, qui réponde au problème — Les mêmes calculs donnent la trajectoire d'un point matériel repoussé par le centre : alors on fera : $\mu < 0$; h sera constamment positif car : $h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$
donc on aura toujours une branche d'hyperbole, seulement c'est l'autre branche, celle qui tourne sa convexité vers le pôle qui répond à la question. Les 2 branches sont donc les solutions du même problème, selon que la force est attractive ou répulsive.

Supposons qu'on donne la position initiale M_0 et la vitesse initiale v_0 ; quelle que soit la direction de v_0, le genre de la courbe décrite sera le même car h aura une valeur fixe. On voit d'ailleurs qu'on pourra toujours obtenir une ellipse en prenant v_0 suffisamment petite, de manière à rendre h négatif. Si $v_0 = 0$, le point mobile tomberait directement sur le centre S (voir mouvement rectiligne). Pour une même valeur de v_0, on obtient des ellipses de même excentricité (elles s'aplatissent et se réduisent à une droite quand v_0 est dirigée suivant le rayon vecteur) ; quand v_0 grandit, la courbe devient une parabole puis une hyperbole (branche simple).

Nous allons déterminer inversement les constantes d'intégration C et h en fonction des constantes de la trajectoire.

$C^2 = \mu p$ $\quad e^2 - 1 = \dfrac{hC^2}{\mu^2}$ $\quad h = \dfrac{\mu^2}{C^2}(e^2-1) = \dfrac{\mu}{p}(e^2-1)$

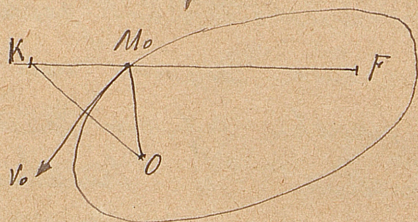
Or: $e^2 = \dfrac{c^2}{a^2}$ $\quad e^2 - 1 = \dfrac{c^2-a^2}{a^2} = \dfrac{-b^2}{a^2}$ D'autre part: $p = \dfrac{b^2}{a}$.

Donc $\quad h = -\dfrac{\mu}{a}$.

On a supposé que la trajectoire était elliptique en faisant $c^2 - a^2 = -b^2$; car pour une hyperbole: $\quad c^2 - a^2 = +b^2 \quad e^2 > 1$.

La dernière formule montre que a dépend seulement de h. Donc toutes les ellipses obtenues en lançant le mobile du même point avec la même vitesse ont même grand axe (en grandeur).

On peut dès lors construire l'ellipse; connaissant: $\quad a = -\dfrac{\mu}{h}$



On prendra K symétrique de O par rapport à M_0v_0 (tangente) on joindra KM_0 ~~et on~~ portera sur cette droite la longueur $2a$: l'extrémité sera le 2e foyer.

Newton a expliqué par la même loi le mouvement des comètes. Il supposa que les comètes décrivent autour du soleil des ellipses très excentriques ou des paraboles, et qu'elles ne sont visibles pour nous qu'au voisinage du soleil, c.à.d. vers leur périhélie. Or, si cela est, elles doivent décrire au périhélie un arc de parabole ou un arc d'ellipse très-voisin d'un arc de parabole, ayant pour foyer le soleil, et suivant la loi des aires. C'est ce que Newton, et beaucoup d'autres astronomes après lui, ont vérifié sur toutes les comètes. — On en conclut qu'elles sont aussi soumises à l'attraction newtonienne, exprimée par la formule:

$$F = -\frac{m\mu}{r^2} \qquad \text{où}: \quad \mu = \frac{C^2}{p}.$$

On calcule le coefficient μ pour chaque comète, on trouve qu'il est

le même, non-seulement pour toutes les comètes, mais pour les comètes et les planètes, et qu'il est égal à : $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ nombre calculé pour les planètes.
Ainsi les comètes obéissent à la même loi de force que les planètes.

Newton donna une nouvelle extension à cette loi en la vérifiant encore sur les satellites des diverses planètes : il constata qu'ils se meuvent autour des planètes suivant les lois de Kepler (la 3e n'a de sens que pour les planètes ayant plusieurs satellites.) Il trouva que le coefficient μ' était le même pour tous les satellites d'une même planète (μ' est d'ailleurs différent d'une planète à l'autre, et différent de μ trouvé pour les planètes) ; $\mu' = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2}$ a', T' relatifs aux satellites.
En particulier, la terre attire la lune suivant la même loi, et on a $F = -\frac{m\mu_1}{r^2}$ $\mu_1 = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2}$ ($a_1 = 60$ rayons terrestres. $T_1 = 27$ jours 7 heures.

Pour contrôler ce dernier résultat, Newton se demanda si la terre attirait la lune suivant la même loi de force que les corps situés à la surface de la terre. On sait qu'on peut confondre par approximation, le poids d'un corps avec l'attraction que la terre exerce sur lui : la vérification conçue par Newton consiste à calculer le poids qu'aurait la masse de la lune située à la surface de la terre, en supposant vraie la loi d'attraction à toute distance, et à en déduire l'intensité de la pesanteur, que l'on connaît d'autre part par l'expérience. Soit m la masse de la lune ; placée à la surface de la terre, elle aurait pour poids : (sensiblement égal à l'attraction) : $-mg = F_1$ (distance ρ.)
D'autre part, à la distance : $r = a_1 = 60\rho$ (par approximation) elle subit l'attraction réelle : $F = -\frac{m\mu}{r^2}$ On doit avoir,

en vertu de la loi de Newton : $\frac{F_1}{F} = 60^2$.

Or : $F = -\frac{m\mu}{r^2} = -\frac{m \cdot 4\pi^2 a_1^3}{r^2 T_1^2} = -\frac{4\pi^2 m a_1}{T_1^2}$ puisque $r = a_1 = 60\rho$.

$\frac{F_1}{F} = \frac{g T_1^2}{4\pi^2 a_1} = 60^2$ d'où : $g = \frac{4 \cdot 60^2 \pi^2 a_1}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 60^3 \rho}{T_1^2}$

formule calculable en nombres, puisqu'on connaît ρ (rayon terrestre) et T_1. On retrouve ainsi la valeur connue de g, avec une approximation d'autant plus grande que les calculs sont plus exacts. Donc tous les corps terrestres obéissent à la loi de Newton, et la pesanteur n'est qu'un cas particulier de l'attraction planétaire.

Loi de l'attraction universelle.

Ainsi le soleil attire la terre, qui attire à son tour la lune et les corps terrestres ; la terre doit donc aussi attirer le soleil, et cette attraction a pour formule : $F' = -\frac{m \cdot \mu'}{r^2}$

Or l'attraction que le soleil exerce sur la terre a pour formule : $F = -\frac{m'\mu}{r^2}$

m' masse de la terre
μ' coefficient terrestre.
m masse du soleil.
μ coefficient du soleil.

En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, ces 2 forces doivent être égales ; donc : $m\mu' = m'\mu$,

ou : $\frac{m}{\mu} = \frac{m'}{\mu'} = f$ d'où : $F = -\frac{f m m'}{r^2}$.

ce qui s'énonce : Le soleil et la terre s'attirent mutuellement proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance — On peut énoncer la même loi pour le soleil et les autres planètes, pour la terre et la lune, pour les satellites, les comètes, etc.

Généralisant cette loi, Newton a formulé la loi suivante :

Deux points matériels quelconques, de masses m, m', s'attirent en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré de leur

distance ; autrement dit, leur action mutuelle se traduit par une force dirigée suivant leur distance et représentée par la formule :

$F = -\frac{fmm'}{r^2}$ le signe − indiquant que la force appliquée à chacun des 2 points est dirigée vers l'autre.

f est un coefficient numérique constant, dont la signification est simple : c'est l'attraction exercée par l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance. Ce nombre n'est pas un nombre abstrait fixe ; il dépend du système d'unités choisi.

Depuis Newton, on a découvert un grand nombre d'étoiles doubles dont les mouvements relatifs semblent se conformer aux lois de Kepler. Si l'on considère comme immobile l'étoile principale, O, on voit, non le mouvement relatif vrai, mais sa projection sur la sphère, ou (ce qui revient au même à cause de la petitesse de l'angle soustendu) sur le plan tangent à la sphère, perpendiculaire, par conséquent, au rayon visuel. Dans ce mouvement relatif apparent, la petite étoile, M, décrit autour de la grande une ellipse suivant la loi des aires, mais le point O n'en est pas le foyer, ni le centre non plus. Or, en vertu de la loi des aires, on peut affirmer que la force rencontre le rayon visuel TO, puisque le moment de la force doit être ~~dans le plan de~~ nul par rapport à cet axe. La même conclusion s'impose pour toutes les étoiles doubles. Comme la terre est un point quelconque de l'espace, sans liaison mécanique avec les étoiles, il est très vraisemblable que les forces qui agissent sur les étoiles doubles rencontreraient encore les axes OT' issus d'un autre point T' ; on peut donc admettre comme infiniment probable que ces forces sont centrales. On en

conclut que la trajectoire réelle, dans l'espace (dont la projection plane est une ellipse) est une ellipse, et qu'elle est décrite suivant la loi des aires (comme sa projection.) — On ne peut affirmer que cette ellipse ait pour foyer le point O (on sait seulement que le p. O est dans son plan). Si l'on admet encore cette propriété, on peut déterminer la position de la trajectoire dans l'espace, non sans ambiguïté: car il y a 2 solutions, symétriques par rapport à OT, ayant toutes deux pour projection l'ellipse apparente (perspective sur la sphère céleste) et pour foyer O.
— Ces considérations ont amené M. J. Bertrand à poser le problème suivant, en admettant que l'étoile satellite décrirait une ellipse autour de l'étoile principale quelles que soient les conditions initiales:

Sachant qu'une force centrale fait décrire à son point d'application une ellipse (plus généralement une conique) quelles que soient les conditions initiales, trouver la loi de cette force, en supposant qu'elle ne dépend que de la position.

Ce problème a été résolu par M. M. Darboux et Halphen: ils ont trouvé en général 2 solutions qui dépendent de r et de θ. Si l'on veut que la force ne dépende que de la distance (ce qui est vraisemblablement le cas des attractions célestes) ces 2 lois de force sont:

$$F = -\frac{m\mu}{r^2} \qquad F = \pm mk^2 r$$

Cette dernière (force proportionnelle à la distance, étudiée plus haut, page 90) doit être rejetée pour les étoiles doubles observées, car dans ce cas l'ellipse décrite a pour centre le point O, et cette propriété se conserve dans la perspective: or l'ellipse de projection n'a pas pour centre le p. O. Il reste donc la 1e loi de force, qui est l'attraction newtonienne. Ainsi se trouve étendue aux étoiles, avec une haute

probabilité, la loi de l'attraction universelle.

Explication du mouvement du système solaire par la loi de Newton.

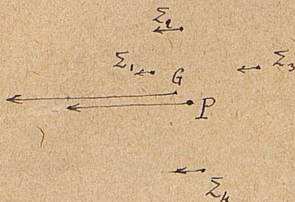
Dans cette explication, on peut considérer comme nulle l'action des étoiles sur les divers corps du système solaire, leur distance étant immense comparée aux dimensions de ce système.

Cette explication est encore simplifiée par 2 théorèmes : le théorème du mouvement du centre de gravité, qui, comme nous l'avons vu, permet de réduire les corps célestes à leurs centres et d'étudier séparément le mouvement de ces centres ; et le suivant :

Théorème : L'attraction exercée par un système de corps sur un point très éloigné est sensiblement la même que si la masse attirante tout entière était concentrée en son centre de gravité.

Soit par exemple une planète P avec ses satellites $\Sigma_1, \Sigma_2 \ldots$, comme Jupiter, et considérons un point très éloigné M, par exemple un point du soleil. En vertu du théorème du mouvement du centre de gravité, ce mouvement est le même que si l'on transportait au centre G les attractions exercées sur P, $\Sigma_1, \Sigma_2 \ldots$ par le point M et les autres. Or, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, l'attraction exercée par chacun des points P, $\Sigma_1, \Sigma_2 \ldots$ sur le p. M est égale et opposée à l'attraction qu'il subit de la part de ce point : la résultante de ces actions appliquées au point M sera égale et opposée à l'attraction totale exercée par M sur G, c.à.d. égale à l'attraction qu'exercerait sur M la masse totale du système concentrée en G.





On peut donc, en vertu de ce théorème, réduire avec une grande approximation chaque système planétaire à son centre de gravité. On ramène ainsi le système solaire à un système de n points matériels qui s'attirent en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré de la distance. Le problème consiste à trouver leur mouvement.

Quand on prend $n = 3$, on a le fameux problème des trois corps : il n'a pas encore été complètement résolu. On a trouvé pour le problème général des n corps 7 intégrales premières du mouvement, mais elles ne suffisent pas pour résoudre le problème général. On le résout par les méthodes d'approximation. Ces méthodes sont applicables au système solaire, et réussissent grâce à ce fait que la masse du soleil est très grande par rapport aux masses des autres corps : ainsi celle du système de Jupiter, le plus important de tous, est à peine $\frac{1}{1000}$ de la masse solaire. Il en résulte que les attractions exercées sur une planète par les autres est très petite par rapport à l'attraction solaire (les distances étant de même ordre) et qu'on peut les négliger dans une première approximation. On est ainsi ramené au problème des 2 corps, c.à.d. à ne considérer que le système formé par le soleil et une planète s'attirant suivant la loi de Newton. C'est ce problème que nous allons résoudre.

Soit S le centre du soleil (α, β, γ) M sa masse ; P le centre de la planète (x, y, z) m sa masse ; l'attraction réciproque de S et de P est exprimée par la formule : $F = -\frac{fMm}{r^2}$

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

Les équations du mouvement sont :

$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2}\frac{x-\alpha}{r} \qquad M\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2}\frac{y-\beta}{r} \qquad M\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2}\frac{z-\gamma}{r}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2}\frac{\alpha-x}{r} \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2}\frac{\beta-y}{r} \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{fMm}{r^2}\frac{\gamma-z}{r}$$

Ces 6 équations déterminent $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$. On a, en ajoutant les équations de même rang :
$$M\frac{d^2\alpha}{dt^2} + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$
Introduisons les coordonnées $(\xi\ \eta\ \zeta)$ du centre de gravité du système, G (très près de S) : on sait que :
$$(M+m)\xi = M\alpha + mx$$
L'équation précédente revient à :
$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$$
Et on a de même :
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0.$$
Ainsi l'accélération du centre de gravité est nulle, c.à.d. que son mouvement est rectiligne et uniforme, comme on le prouverait en intégrant ces 3 équations. Nous venons de démontrer un cas particulier du théorème du mouvement du centre de gravité : en effet, puisqu'aucune force extérieure n'agit par hypothèse sur le système des 2 points S, P, le centre de gravité doit avoir un mouvement rectiligne et uniforme.

Cherchons maintenant le mouvement relatif de P autour de S (S étant très-voisin de G). Menons par S 3 axes $(x_1\ y_1\ z_1)$ parallèles aux axes fixes $Oxyz$. On a les formules de transformation :
$$x_1 = x - \alpha \qquad y_1 = y - \beta \qquad z_1 = z - \gamma$$
Les 3 axes $Sx_1y_1z_1$ sont mobiles et ont un mouvement de translation par rapport aux axes $Oxyz$. Dans ce système mobile, les équations du mouvement sont, en posant : $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{fm}{r^2}\frac{x-\alpha}{r} \quad \ldots\ldots \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{fM}{r^2}\frac{\alpha - x}{r} \quad \ldots\ldots$$
Retranchons membre à membre ces 2 équations :
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{f}{r^2}(M+m)\frac{x-\alpha}{r} \quad \text{ou :} \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{f(M+m)}{r^2}\frac{x_1}{r}$$
On aurait de même $\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2z_1}{dt^2}$.

Ces 3 équations déterminent x, y, z en fonction du temps, càd. le mouvement relatif de P par rapport à S. Or on les a déjà intégrées : ce sont les équations du mouvement d'un point de masse $\underline{m}$ attiré par un point fixe placé à l'origine avec une intensité qui a pour formule : $\frac{fm(M+m)}{r^2}$

Ainsi le mouvement relatif de P est le mouvement absolu qu'aurait ce point si S était fixe, avait la masse $(M+m)$ et l'attirait P suivant la loi de Newton. On a étudié ce mouvement ci-dessus on a trouvé que la trajectoire est plane, et que c'est une section conique ayant pour foyer le soleil et ~~décrite~~ parcourue suivant la loi des aires. On retrouve ainsi les 2 premières lois de Kepler — Le problème des 2 corps est donc résolu, puisqu'on connait le mouvement du centre de gravité du système (S, P) et le mouvement relatif de P par rapport à S.

La 3e loi de Kepler donne lieu à une remarque importante. Nous venons de voir que la force attractive apparente, quand le soleil est supposé fixe, est : $\frac{m\mu}{r^2}$ en posant : $\mu = f(M+m)$

Or on sait que : $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ quand la trajectoire est une ellipse ce qui a lieu pour toutes les planètes. Donc :

$$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

pour la planète considérée. Pour une autre planète, on aurait de même :

$$f(M+m') = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2}$$

toujours à la même approximation, càd. en négligeant les actions mutuelles des planètes. Donc : $\frac{M+m}{M+m'} = \frac{a^3}{T^2} : \frac{a'^3}{T'^2}$

ce qui prouve que $\frac{a^3}{T^2}$ n'est pas rigoureusement égal à $\frac{a'^3}{T'^2}$; mais

comme m, m' sont en fait très petites par rapport à M, le rapport :

$$\frac{a^3}{T^2} : \frac{a'^3}{T'^2} = \frac{1+\frac{m}{M}}{1+\frac{m'}{M}}$$ est sensiblement égal à 1.

La 3e loi de Kepler n'est donc qu'approchée.

La formule précédente : $$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$
a permis à Newton de déterminer approximativement la masse des planètes qui ont des satellites.

On peut étudier le mouvement d'un satellite autour d'une planète comme celui d'une planète autour du soleil : on négligera, s'il y a lieu, les actions des autres satellites sur le satellite considéré, parce que leurs masses sont en général très faibles par rapport à celle de la planète.
Soit $P(x\,y\,z)$ la planète, m sa masse ; $P_1(x_1\,y_1\,z_1)$ le satellite, m_1 sa masse ; l'attraction mutuelle de P et P_1 sera : $$\frac{f m m_1}{r_1^2}$$
en posant : $r_1 = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}$

On ne peut négliger l'attraction du soleil sur le satellite, car si la distance du soleil est très grande relativement à r_1, sa masse est très grande par rapport à celle de la planète. Mais, à cause de cette distance immense, on peut considérer le soleil comme étant à une distance égale de P et de P_1, et les droites SP, SP_1 comme parallèles. Les attractions exercées par le soleil sur la planète et son satellite seront donc sensiblement parallèles et proportionnelles à leurs masses.
On en peut dire autant des actions des autres planètes, si l'on ne veut pas les négliger ; les actions totales Φ, Φ_1 sur P et P_1 seront parallèles et proportionnelles aux masses ; nous appellerons leurs projections :

$m X$, $m Y$, $m Z$ et $m_1 X$, $m_1 Y$, $m_1 Z$.

Cela posé, les équations du mouvement de P, P_1 seront :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{fmm_1}{r_1^2}\,\frac{x_1-x}{r_1} + mX \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} =$$

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{fmm_1}{r_1^2}\,\frac{x-x_1}{r_1} + m_1X \qquad m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} = \qquad m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} =$$

ou $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{fm_1}{r_1^2}\,\dfrac{x_1-x}{r_1} + X \qquad \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{fm}{r_1^2}\,\dfrac{x-x_1}{r_1} + X$

En retranchant membre à membre les équations précédentes, on aura les équations du mouvement relatif du satellite autour de la planète ; soient : $x' = x_1 - x \quad y' = y_1 - y \quad z' = z_1 - z$ les coordonnées relatives de P_1 dans un système d'axes d'origine P ;

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{f(m+m_1)}{r_1^2}\,\frac{x_1-x}{r_1} \qquad \frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{f(m+m_1)}{r_1^2}\,\frac{x'}{r_1}$$

De même : $\dfrac{d^2y'}{dt^2} = -\dfrac{f(m+m_1)}{r_1^2}\,\dfrac{y'}{r_1} \qquad \dfrac{d^2z'}{dt^2} = -\dfrac{f(m+m_1)}{r_1^2}\,\dfrac{z'}{r_1}$

On voit que les actions extérieures Φ, Φ_1 ont disparu des formules grâce à l'hypothèse approximative qu'on a faite. Les équations obtenues montrent que le mouvement relatif de P_1 autour de P est le mouvement absolu qu'aurait le satellite si la planète étant fixe et ayant la masse $(m+m_1)$ l'attirait suivant la loi de Newton. L'attraction apparente de la planète supposée fixe serait :

$$\frac{m_1\mu_1}{r_1^2} \quad \text{en posant :} \quad \mu_1 = f(m+m_1)$$

Il en résulte que les satellites décrivent des coniques qui ont pour foyer P, et qu'ils parcourent suivant la loi des aires. On a d'ailleurs :

$$\mu_1 = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2} \quad \text{d'où :} \quad f(m+m_1) = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T^2}$$

formule d'où l'on déduit les mêmes conséquences que pour les planètes.
Rappelons la formule analogue pour les planètes :

$$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

Le rapprochement de ces 2 équations permet de calculer approximativement la masse d'une planète qui a un satellite : en effet, on en tire

$$\frac{m+m_1}{M+m} = \frac{a_1^3}{T_1^2} : \frac{a^3}{T^2} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{M} \cdot \frac{1+\frac{m_1}{m}}{1+\frac{m}{M}} = \frac{a_1^3}{T_1^2} : \frac{a^3}{T^2}$$

Le rapport $\frac{1+\frac{m_1}{m}}{1+\frac{m}{M}}$ est très voisin de 1, si m est négligeable par rapport à M, et m_1 par rapport à m : donc le 1er membre est sensiblement égal à $\frac{m}{M}$, et comme on connaît a, T, a_1, T_1, on tirera de cette formule une valeur approchée de $\frac{m}{M}$.

Pour la terre, cette approximation serait très imparfaite, car la masse de la lune n'est pas négligeable par rapport à celle de la terre. Mais on peut déterminer la masse de la terre par des expériences faites à sa surface.

Prenons un point matériel de masse 1 à la surface de la terre, c.à.d. à la distance ρ du centre (ρ étant le rayon terrestre). Soit A l'attraction exercée par la terre sur ce point ; on sait qu'elle est à peu près égale à son poids ; on verra plus tard un moyen de la calculer plus rigoureusement. Or, on démontre que l'attraction exercée sur un point matériel par une sphère à couches concentriques homogènes est la même que si la masse totale était réunie en son centre ; ce théorème s'applique à la terre dans la mesure où on peut la considérer comme une sphère à couches concentriques homogènes ; soit m sa masse ; on a sensiblement :

$$A = \frac{fm}{\rho^2}$$

Éliminons f ; on trouve :

$$\frac{M}{m} + 1 = \frac{4\pi^2 a^3}{AT^2\rho^2}$$

On peut, pour une première approximation, remplacer A par le poids absolu de l'unité de masse ; on aura ainsi une valeur approchée de $\frac{M}{m}$.

Si l'on connaît d'autre part la masse de la terre, on pourra ainsi calculer la masse M du soleil, et par là les masses des planètes qui ont des satellites.

— Détermination du temps dans le mouvement elliptique d'une planète. On continue à réduire le système solaire au soleil S et à une planète P, et on considère S comme fixe, de sorte qu'on a le mouvement relatif de la planète autour du soleil. Prenons pour axe polaire le grand axe de l'ellipse dirigé vers le périhélie A. On a l'intégrale des forces vives :

$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h$ On sait que, quand la trajectoire est une ellipse

$h = -\frac{\mu}{a}$ D'autre part $v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{C^2}{r^2}$

On a pour la constante des aires : $C^2 = \mu p$ où : $p = \frac{b^2}{a}$.

Donc : $\frac{dr^2}{dt^2} = -\frac{\mu p}{r^2} + \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$

équation différentielle qui donnera t en fonction de r :

$r^2 \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{\mu}{a}\left(-b^2 + 2ar - r^2\right)$ Or, $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2e^2$

$r^2 \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{\mu}{a}\left[a^2e^2 - (a-r)^2\right]$ $\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\, dt.$

Pour que $\frac{dr}{dt}$ soit réel, il faut que $(a-r)$ varie entre $+ae$ et $-ae$, et en effet, r varie entre $(a+c)$ et $(a-c)$. — Pour déterminer le signe du radical, puisque l'on prend le périhélie pour position initiale, on a $\frac{dr}{dt} > 0$; on devra donc choisir le signe $+$.

Prenons pour intégrer l'angle auxiliaire u, et posons ;

$a - r = ae\cos u$ (u est l'anomalie excentrique)

$r = a(1 - e\cos u)$ $dr = ae\sin u \, du$ L'équation devient :

$a(1 - e\cos u)\,du = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\,dt$ en intégrant ; $u - e\sin u = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\, t.$

La constante d'intégration est nulle, car u part de 0 avec t.

Cette équation de Kepler donne u en fonction de t, si l'on peut la résoudre par rapport à u. Connaissant u, on en déduira aisément r et θ, c.à.d. la position de la planète à un instant quelconque.

Le 2e membre de cette équation représente l'anomalie moyenne :

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \qquad \frac{\mu}{a^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \qquad \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} = \frac{2\pi}{T}$$

On pouvait prévoir que le coefficient de t aurait cette forme, puisque après un tour complet, t augmente de T, et u de 2π : on pouvait écrire a priori ; en désignant par n le coefficient inconnu de t, et en remarquant que la valeur du sinus redevient la même après un tour complet : $u + 2\pi - e\sin u = n(t+T)$ d'où : $n = \frac{2\pi}{T}$.

n s'appelle le moyen mouvement de la planète ; l'anomalie moyenne est donc nt.

Calculons θ en fonction de u (θ s'appelle anomalie vraie) :

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \qquad r = a(1-e\cos u)$$

Or $p = \frac{b^2}{a}$: $\qquad \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{1+e\cos\theta} = 1-e\cos u$

Or $\frac{b^2}{a^2} = 1-e^2 \qquad \frac{1-e^2}{1-e\cos u} = 1+e\cos\theta$ d'où $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u}$$

Pour avoir une formule calculable par log. on calcule $(1+\cos\theta)$, $(1-\cos\theta)$:

$$\begin{cases} 1+\cos\theta = \dfrac{(1-e)(1+\cos u)}{1-e\cos u} \\ 1-\cos\theta = \dfrac{(1+e)(1-\cos u)}{1-e\cos u} \end{cases}$$

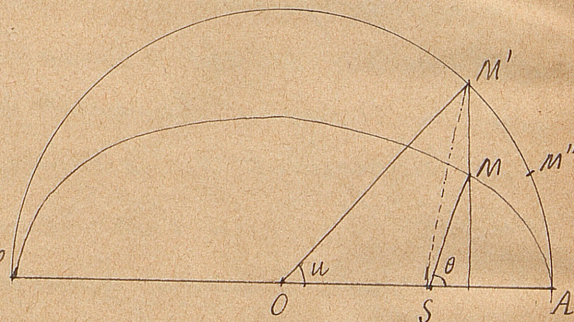
Or $1-e\cos u = \frac{r}{a}$; d'où :

$$\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{(1-e)}\cos\frac{u}{2}$$

$$\sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{1+e}\sin\frac{u}{2}$$

d'où enfin : $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}$.

— On retrouve géométriquement les formules précédentes en considérant le cercle homographique de l'ellipse, qui a pour diamètre $2a$. On sait que l'ellipse peut être considérée comme la projection de ce cercle qu'on aurait fait tourner autour de son diamètre de l'angle α qui a pour cosinus $\frac{b}{a}$. Le rapport de l'aire du cercle à celle de l'ellipse, et plus généralement de l'aire d'une portion quelconque du cercle à l'aire de sa projection, est $\cos\alpha$ ou $\frac{b}{a}$: l'aire de l'ellipse est πab. Soit toujours A le périhélie, ~~origine du mouvement~~; M la position de la planète sur l'ellipse à l'époque t ; S au foyer de l'ellipse. L'angle $MSA = \theta$ est l'anomalie vraie. Le secteur MSA est proportionnel au temps, en vertu de la loi des aires ; on a donc la proportion :



$$\frac{\text{sect. } MSA}{\pi ab} = \frac{t}{T}$$

Evaluons le secteur MSA : il est la projection du secteur circulaire excentrique M'SA :
$$MSA = \frac{b}{a} M'SA$$

Or, $M'SA = \text{sect. } M'OA - \text{tr. } M'OS = \frac{1}{2}a^2u - \frac{1}{2}a^2 e \sin u$

$u = M'\hat{O}A$ anomalie excentrique, c.à d. angle au centre décrit par le point M' correspondant au p. M sur le cercle homographique.

$$MSA = \frac{ab}{2}(u - e\sin u) \quad \text{d'où :} \quad u - e\sin u = 2\pi\frac{t}{T}$$

équation de Kepler. Le 2e membre : $\frac{2\pi t}{T} = \zeta$ est l'anomalie moyenne. Cet angle a une signification géométrique : il serait égal à u si e était nulle, c.à d. si l'ellipse coïncidait

avec son cercle homographique; mais alors S coïnciderait avec O, et en vertu de la loi des aires, le mouvement de M serait uniforme, sa vitesse angulaire étant $\frac{2\pi}{T}$. Donc, pour figurer l'angle ζ, on peut imaginer un point M'' mobile sur la circonférence, partant de A en même temps que M et parcourant le cercle homographique dans le temps T d'un mouvement uniforme. A l'instant t, il aura décrit l'angle $M''OA = \frac{2\pi}{T} t = \zeta$.

Pour trouver géométriquement les relations entre ζ, θ et u, il suffit d'écrire l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires par rapport à son foyer S;
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$
et de calculer r: soit MQ la distance du p. M à la directrice de l'ellipse; on a:
$$\frac{r}{MQ} = e$$
Or MQ est la différence entre la distance OP du centre à la directrice et l'abscisse variable de M rapportée à ce centre:
$$MQ = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a}{e} - x \qquad \text{Or,} \quad x = a\cos u$$
$$MQ = \frac{a}{e} - a\cos u \qquad r = e.MQ = a(1 - e\cos u)$$
Une fois retrouvée cette expression de r en fonction de u, on en déduit comme ci-dessus la relation entre θ et u.

— Tout revient donc, avons nous dit, à résoudre l'équation de Kepler:
$$u - e\sin u = \zeta.$$
Pour les planètes, dont l'excentricité est très-petite, on peut employer la méthode des approximations successives: on met pour cela l'équation sous la forme suivante:
$$u = \zeta + e\sin u$$

On commence par supposer e nulle, c.à.d. l'orbite circulaire, et on a une première valeur approchée : $u_1 = \zeta$

On porte cette valeur dans l'équation complète et on en tire une 2e valeur plus approchée : $u_2 = \zeta + e \sin u_1$

puis une 3e valeur approchée : $u_3 = \zeta + e \sin u_2$

et ainsi de suite indéfiniment. On démontre que les quantités $u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_n \ldots$ tendent vers une racine de l'équation (vers celle qui est égale à ζ pour $e = 0$) quand n augmente indéfiniment. On peut ainsi, en prolongeant la suite des opérations, atteindre une valeur aussi approchée que l'on veut.

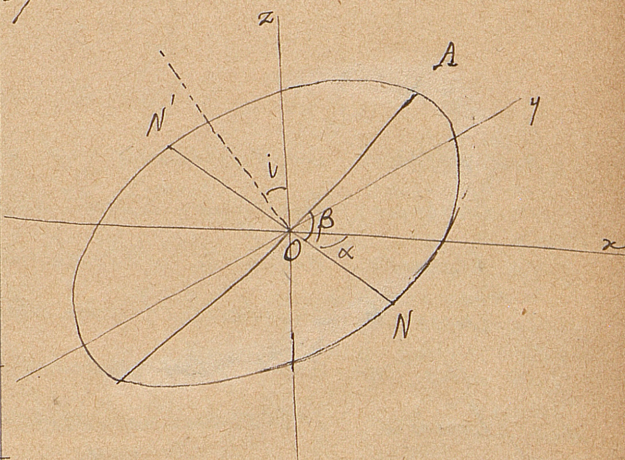
On peut aussi employer la formule générale de Lagrange : étant donnée une équation de la forme : $u = \zeta + e\,F(u)$ (en u) qui admet une racine qui se réduit à ζ quand e s'annule, on peut développer cette racine, et même une fonction de cette racine, $\varphi(u)$, suivant les puissances croissantes de e, en une série convergente, pourvu que e soit suffisamment petit. Comme pour les planètes e est très petit, la série de Lagrange est rapidement convergente, et fournit un moyen pratique de calculer non seulement u, mais des fonctions de u, comme, par exemple :

$$r = a\,(1 - e \cos u)$$

— Problème des perturbations, ou de la variation des constantes.

Nous venons de traiter le problème des 2 corps, c.à.d. que nous avons étudié le mouvement relatif d'une planète autour du soleil comme si elle était seule. Ce mouvement doit dépendre de 6 constantes, qui fixent à chaque instant la position de la planète

dans un système de coordonnées : le système usité en astronomie a pour plan des xy le plan de l'écliptique de 1850, pour axe des x la ligne des équinoxes dirigée vers le point vernal, pour axe des y la ligne perpendiculaire qui va au solstice d'été, et pour axe des z la perpendiculaire au plan Oxy du côté boréal.



L'ellipse décrite par la planète perce le plan Oxy en 2 points N, N' diamétralement opposés (puisque O, le soleil, est dans son plan) qu'on appelle les nœuds. On nomme nœud ascendant celui par lequel la planète passe de l'hémisphère austral dans l'hémisphère boréal (son z augmente en passant du négatif au positif.) On se donne d'abord l'angle $xSN = \underline{\alpha}$, longitude du nœud ascendant, qui fixe la direction NN' dans le plan Oxy ; puis l'angle i inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique de 1850. Ces 2 angles définissent la position du plan de l'orbite dans l'espace. Dans ce plan, on se donnera l'angle $NSA = \underline{\beta}$ que fait le rayon vecteur du périhélie avec le nœud ascendant, et qui fixe la position du grand axe dans le plan ; puis la longueur a du demi-grand axe et l'excentricité $\underline{e}$ de l'ellipse, qui définissent la forme et la grandeur de l'orbite ; enfin $\underline{\tau}$ instant du passage de la planète au périhélie A, qui fixe dans le temps la position considérée comme initiale de la planète. T, durée de la révolution, n'est pas une constante indépendante, car

on peut la tirer de la formule : $f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$

où f, M, m sont des constantes numériques connues. — On aura donc les coordonnées de la planète à un instant quelconque t par des équations de la forme :

$$x = \varphi(t, \alpha, i, \beta, a, e, \tau)$$
$$y = \psi(t, \alpha, i, \beta, a, e, \tau)$$
$$z = \varpi(t, \alpha, i, \beta, a, e, \tau)$$

Pour obtenir ces équations, il suffit d'opérer un changement de coordonnées, puisque nous avons calculé les coordonnées polaires de la planète dans le plan de son orbite. Ces formules définissent, avec leurs 6 constantes, une ellipse fixe dans l'espace.

Or elles ne sont plus vraies quand on considère les actions mutuelles des planètes, et l'orbite de chacune d'elles n'est pas rigoureusement elliptique. On convient de conserver ces formules avec leurs 6 constantes, à condition de ~~les~~ considérer celles-ci comme variables avec le temps, c.à.d. fonctions du temps. On continue à considérer les orbites comme elliptiques, mais on admet que les constantes varient, c.à.d. que les ellipses se déforment sans cesse. Les variations des 6 constantes de chaque orbite s'appellent les <u>perturbations</u> du mouvement de la planète ; la partie de la mécanique céleste qui se propose de déterminer le mouvement réel des planètes en tenant compte de leurs actions mutuelles se nomme <u>Calcul des perturbations</u>.

— <u>Détermination du temps dans un mouvement parabolique</u> (comme celui des comètes.) Prenons l'équation de la parabole rapportée à son foyer :

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta} = \frac{p}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

et appliquons-lui la loi des aires : $r^2 d\theta = C dt$.

$C = \sqrt{\mu p}$ $\quad \mu = f(M+m)$ $\quad \sqrt{\mu p}\, dt = \dfrac{p^2}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}\, d\theta$

ou : $$\frac{2\sqrt{\mu p}}{p^2}\, dt = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^4\frac{\theta}{2}} = \frac{\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) d\frac{\theta}{2}}{\cos^4\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} + \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\, tg^2\frac{\theta}{2}$$ en intégrant : $$\frac{2\sqrt{\mu p}}{p^2}\, t = tg\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\, tg^3\frac{\theta}{2}.$$

La constante d'intégration est nulle puisque $t = 0$ pour $\theta = 0$. On aura donc θ en fonction de t par une équation du 3e degré qui n'a qu'une racine réelle, car la dérivée du 2e membre : $\left(1 + tg^2\frac{\theta}{2}\right)$ a ses racines imaginaires. Pour n'avoir pas à résoudre chaque fois cette équation, on a construit des tables qui donnent la racine de cette équation pour chaque valeur numérique du 1er membre, puisque le 2e ne contient que l'inconnue $tg\frac{\theta}{2}$. On fait d'ailleurs, sans erreur sensible : $\mu = fM$, à cause de la masse extrêmement faible des comètes ; il n'y a donc que le coefficient p qui varie avec l'astre considéré ; on trouve dans les tables la solution qui répond à une valeur quelconque de p.

Le calcul des perturbations s'applique aussi aux comètes, d'autant plus que les attractions planétaires ne sont nullement négligeables. Les 5 constantes qui définissent le mouvement parabolique doivent par suite être considérées comme fonctions du temps.

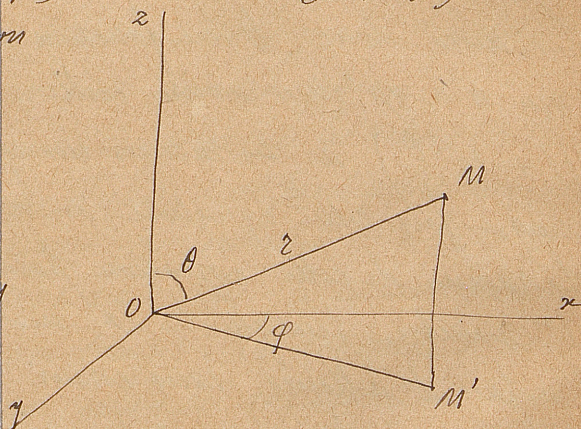
Equations de Lagrange

Lagrange a donné une méthode générale pour écrire les équations du mouvement d'un point dans un système quelconque de coordonnées, fixe ou mobile.

On sait que si la position d'un point dans l'espace est fixée par 3 paramètres $q_1\ q_2\ q_3$, on aura ses coordonnées (cartésiennes) par les formules générales de transformation :

$$x = \varphi(q_1 q_2 q_3) \qquad y = \psi(q_1 q_2 q_3) \qquad z = \varpi(q_1 q_2 q_3)$$

Par exemple, si l'on fixe la position d'un point par ses coordonnées polaires dans l'espace, $MO = r$ rayon vecteur ; $MOz = \theta$, colatitude. $M'Ox = \varphi$ longitude, on aura les coordonnées cartésiennes par les formules de transformation :



$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Si les paramètres $q_1 q_2 q_3$ dépendent du temps les coordonnées xyz en dépendront aussi, et définiront un point mobile dans le système d'axes fixes $Oxyz$.

L'invention de Lagrange consiste à faire figurer le temps explicitement dans les formules de transformation :

$$x = \varphi(q_1 q_2 q_3 t) \qquad y = \psi(q_1 q_2 q_3 t) \qquad z = \varpi(q_1 q_2 q_3 t)$$

Le nouveau système de coordonnées $q_1 q_2 q_3$ est alors mobile, et son mouvement est connu : il suffit de donner à $q_1 q_2 q_3$

des valeurs constantes, les équations précédentes définiront le mouvement, dans ~~les~~ le système d'axes fixes $Oxyz$, du point fixe $(q_1 q_2 q_3)$ dans le système mobile. — Telles sont les formules les plus générales de transformation de coordonnées. En pratique, dans la plupart des cas, les nouveaux axes sont fixes, et le temps ne figure pas explicitement dans x, y, z.

Écrivons les équations du mouvement en coordonnées cartésiennes :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

Multiplions la 1e par $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}$, la 2e par $\frac{\partial\psi}{\partial q_1}$, la 3e par $\frac{\partial\varpi}{\partial q_1}$, et ajoutons :

$$m\left[\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial\varpi}{\partial q_1}\frac{d^2z}{dt^2}\right] = Q_1 = X\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + Y\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + Z\frac{\partial\varpi}{\partial q_1}$$

Le 1er membre peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varpi}{\partial q_1}\frac{dz}{dt}\right)\right] - m\left[\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) + \frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varpi}{\partial q_1}\right)\right]$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)$ et les quantités analogues sont les dérivées par rapport au temps de $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \frac{\partial\varpi}{\partial q_1}$ où $q_1 q_2 q_3$ sont fonctions du temps.

Marquons par des accents les dérivées par rapport au temps :

$x' \; y' \; z'$ seront les projections de la vitesse sur les 3 axes :

$$x' = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}q_2' + \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}q_3' + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$y' = \frac{\partial\psi}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}q_2' + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}q_3' + \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$z' = \frac{\partial\varpi}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial\varpi}{\partial q_2}q_2' + \frac{\partial\varpi}{\partial q_3}q_3' + \frac{\partial\varpi}{\partial t}$$

Les dérivées partielles par rapport à $q_1' \; q_2' \; q_3'$ sont les coefficients

respectifs de ces 3 lettres : donc : $\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = \frac{\partial x'}{\partial q'_1}$ $\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = \frac{\partial y'}{\partial q'_1}$ $\frac{\partial \varpi}{\partial q_1} = \frac{\partial z'}{\partial q'_1}$

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial \varpi}{\partial q_1}\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'_1}\right)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial q'_1}\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\frac{\partial (v^2)}{\partial q'_1}\right]$$

D'autre part, on a l'identité : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial x'}{\partial q_1}$

En effet, $\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}$ dépend de $q_1 q_2 q_3 t$: donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2} q'_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_2} q'_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_3} q'_3 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial t}$$

Or : $$x' = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} q'_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

d'où : $$\frac{\partial x'}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2} q'_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_2} q'_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial q_3} q'_3 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1 \partial t}$$

L'identité est vérifiée. On aura donc :

$$m\left[\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right) + \frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial q_1}\right)\right] = m\left[x'\frac{\partial x'}{\partial q_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_1}\right]$$

$$= \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(x'^2+y'^2+z'^2\right) = \frac{m}{2}\frac{\partial (v^2)}{\partial q_1}$$

Posons : $T = \frac{m}{2}\left(x'^2+y'^2+z'^2\right) = \frac{mv^2}{2}$ demi-force vive

Quand on aura exprimé xyz en fonction de $q_1 q_2 q_3 t$, T sera une fonction de $q_1 q_2 q_3$, $q'_1 q'_2 q'_3$, t, et du 2e degré en $q'_1 q'_2 q'_3$

Cette fonction étant ainsi formée, les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_3} = Q_3$$

dans le nouveau système de coordonnées $q_1 q_2 q_3$. Les dérivées $\frac{\partial T}{\partial q_1'}$ et analogues sont du 1er degré en $q_1' q_2' q_3'$; les dérivées $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)$ et analogues contiendront donc $q_1'' q_2'' q_3''$, et les équations seront du 2e ordre en $q_1 q_2 q_3$; leurs intégrales contiendront 6 constantes.

Les seconds membres sont connus:

$$\begin{cases} Q_1 = X\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + Y\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + Z\frac{\partial\varpi}{\partial q_1} \\ Q_2 = X\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + Y\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + Z\frac{\partial\varpi}{\partial q_2} \\ Q_3 = X\frac{\partial\varphi}{\partial q_3} + Y\frac{\partial\psi}{\partial q_3} + Z\frac{\partial\varpi}{\partial q_3} \end{cases}$$

On peut les calculer d'une manière simple quand il y a une fonction des forces: $U(x, y, z)$ car alors on a:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

et quand U est exprimée en fonction de $q_1 q_2 q_3$ t :

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} \qquad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} \qquad Q_3 = \frac{\partial U}{\partial q_3}$$

Calculons en effet $\frac{\partial U}{\partial q_1}$ dans cette hypothèse:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial\varpi}{\partial q_1} = X\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + Y\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + Z\frac{\partial\varpi}{\partial q_1} = Q_1$$

L'identité est démontrée. Remarquons que ce calcul s'applique toujours, pourvu que: $X = \frac{\partial U}{\partial x}$ $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$ $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$ même si U contenait explicitement le temps (ce ne serait plus une fonction de forces.)

S'il n'y a pas de fonction U vérifiant ces conditions, on pourra calculer Q_1 Q_2 Q_3 de la manière suivante:

Considérons le point mobile M à l'instant t, et, laissant t fixe, imprimons-lui un déplacement virtuel quelconque en faisant varier $q_1 q_2 q_3$ de δq_1 δq_2 δq_3. Les variations correspondantes des coordonnées seront : $\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \delta q_3$

De même δy, δz.

Or pour ce déplacement virtuel le travail de la force est :

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3$$

identité qu'il est aisé de vérifier. Si donc on cherche l'expression du travail virtuel de la force dans le nouveau système, on fera varier $q_1 q_2 q_3$ en laissant t constant, et les coefficients de δq_1 δq_2 δq_3 dans cette expression seront respectivement Q_1 Q_2 Q_3. Pour obtenir séparément Q_1, par exemple, on laissera q_2, q_3 constants, c.à.d. qu'on déplacera le mobile suivant la courbe ($q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$) où q_1 seul varie ; on aura alors simplement : $Q_1 \delta q_1$ d'où on tirera Q_1.

Les équations de Lagrange s'appliquent au mouvement d'un point dans un plan : on n'a qu'à faire : $z = 0$, les équations du mouvement sont, en coordonnées cartésiennes :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X \qquad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y$$

On n'aura que 2 paramètres $q_1 q_2$ pour fixer le p. dans le nouveau système : $x = \varphi(q_1 q_2 t)$ $y = \psi(q_1 q_2 t)$

et les équations de Lagrange seront :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2$$

en posant : $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2)$

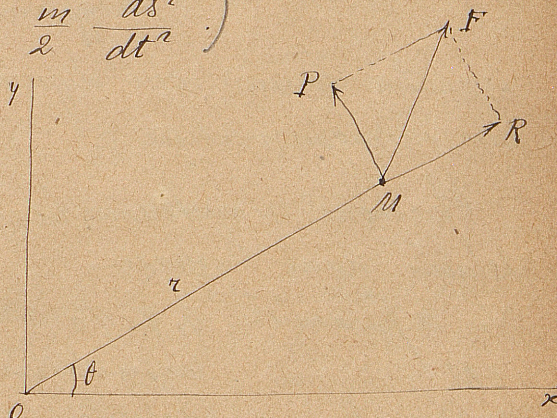
On calculera Q_1 Q_2 par les mêmes procédés indiqués plus haut.

Nous allons par exemple chercher les équations du mouvement d'un point dans un plan en coordonnées polaires.

Les 2 paramètres q_1 q_2 qui fixent la position du p. M sont ici r et θ. On a : $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2)$

(En général, il suffit de connaître ds^2 pour pouvoir calculer T, puisque : $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\frac{ds^2}{dt^2}$)

Calculons Q_1, Q_2.



Pour cela, décomposons la force donnée F en 2 autres, l'une R dirigée suivant le rayon vecteur prolongé, l'autre P, suivant une perpendiculaire à ce rayon vecteur dans le sens de θ croissant, de sorte que ces 2 composantes soient comptées positivement dans le sens des accroissements positifs de r et de θ.

Pour calculer Q_1, faisons varier r seul, le travail élémentaire de la force sera : $Q_1 \delta q_1 = R \delta r$ Donc : $Q_1 = R$.

Pour calculer Q_2, faisons varier θ seul, le travail élémentaire sera : $Q_2 \delta q_2 = P r \delta\theta$ Donc : $Q_2 = Pr$

Les équations du mouvement seront donc :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} mr' - mr\theta'^2 = R \\ \frac{d}{dt} mr^2\theta' = Pr \end{cases}$$

ou explicitement : $$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = R$$

$$2mr\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = Pr$$

On pourrait déduire de ces équations les composantes de l'accélération, qui sont respectivement $\frac{R}{m}$, $\frac{P}{m}$.

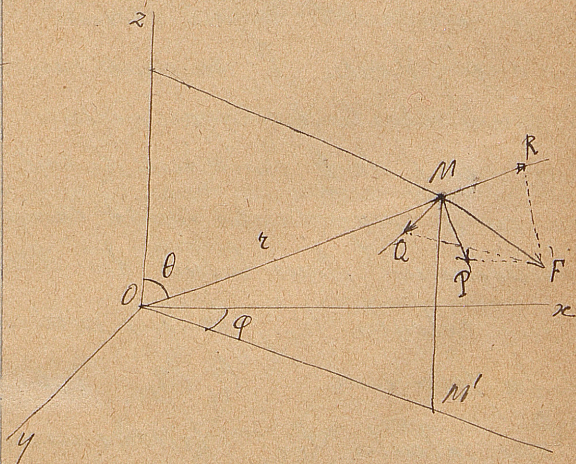
Dans le cas des forces centrales, on a : $P = 0$, $R = F$.

La 2e équation donne : $r^2\frac{d\theta}{dt} = C$ intégrale des aires.

La 1e devient : $m\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{mC^2}{r^3} = F$.

équation connue qui définit le mouvement relatif du point sur son rayon vecteur : $m\frac{d^2r}{dt^2} = F + \frac{mC^2}{r^3}$

— Cherchons maintenant les équations du mouvement en coordonnées polaires dans l'espace.



Les 3 paramètres $q_1\, q_2\, q_3$ seront :

$OM = r$ rayon vecteur ;

$MOz = \theta$ colatitude ;

$M'Ox = \varphi$ longitude.

Calculons $T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\frac{ds^2}{dt^2}$

$$T = \frac{m}{2}\,\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2}{dt^2}$$

$$= \frac{m}{2}\left(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2\sin^2\theta\,\varphi'^2\right)$$

Calculons Q_1, Q_2, Q_3. Pour cela, décomposons la force donnée F en 3 autres, l'une R dirigée suivant le rayon vecteur prolongé, la 2e P, suivant le déplacement de OM dans le plan zOM', la 3e, Q, suivant

le déplacement de M quand ce plan tourne autour de Oz; ces 3 forces étant comptées positivement dans le sens des accroissements positifs de r, θ et φ. Pour trouver Q_1, faisons varier r seul; le travail élémentaire sera: $Q_1 \delta q_1 = R \delta r$ Donc: $Q_1 = R$.

Pour trouver Q_2, faisons varier θ seul; le travail correspondant au déplacement $r d\theta$ sera: $Q_2 \delta q_2 = Pr \delta\theta$ Donc: $Q_2 = Pr$.

Pour trouver Q_3, faisons varier φ seul; le travail correspondant au déplacement $r \sin\theta \, d\varphi$ sera: $Q_3 \delta q_3 = Q r \sin\theta \, \delta\varphi$ d'où: $Q_3 = Q r \sin\theta$.

Les équations du mouvement seront donc:

$$\frac{d}{dt} mr' - mr(\theta'^2 + \sin^2\theta \, \varphi'^2) = R$$

$$\frac{d}{dt} mr^2\theta' - mr^2 \sin\theta \cos\theta \, \varphi'^2 = Pr$$

$$\frac{d}{dt} mr^2 \sin^2\theta \, \varphi' = Q r \sin\theta$$

On pourrait en déduire les 3 composantes de l'accélération, qui sont respectivement $\frac{R}{m}$, $\frac{P}{m}$, $\frac{Q}{m}$.

Si la force rencontre constamment l'axe Oz, $Q = 0$: on tire de la 3e équation: $r^2 \sin^2\theta \, \varphi' = \text{constante}$ intégrale première qui exprime la loi des aires; en effet, le rayon vecteur ρ de M' est $r \sin\theta$, et l'on a: $\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = C$ ce qui montre que la projection de M sur le plan des xy tourne autour de l'origine suivant la loi des aires.

— Appliquons la méthode de Lagrange aux coordonnées elliptiques (dont Jacobi a fait un grand usage en mécanique).

Dans le système des coordonnées elliptiques dans l'espace, un point

est défini par les paramètres de 3 surfaces homofocales du 2e ordre qui passent par ce point ; leur équation commune est :

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0$$

a, b, c étant des constantes, et λ le paramètre variable qui engendre les 3 familles de surfaces. Ces surfaces ont pour plans principaux les plans coordonnés. Supposons, pour préciser,

$$a > b > c$$

Si $\lambda < c$, tous les dénominateurs sont positifs : la surface est un ellipsoïde

Si $c < \lambda < b$, le dernier dénominateur est négatif ; la surface est un hyperboloïde à 1 nappe

Si $b < \lambda < a$, le 1er dénominateur seul est positif ; la surface est un hyperboloïde à 2 nappes.

Enfin, si $\lambda > a$, tous les coefficients étant négatifs, l'équation n'est vérifiée par aucun système de valeurs réelles attribuées à x, y, z : on dit qu'elle représente un ellipsoïde imaginaire.

Donc, pour qu'on ait des surfaces réelles, il faut que le paramètre λ soit compris entre les limites : $-\infty$, a.

On va prouver que par chaque point de l'espace passent 3 surfaces réelles, une de chaque famille – Pour cela, donnons-nous x, y, z ; on aura une équation du 3e degré en λ ; il s'agit de prouver qu'elle a 3 racines réelles, et que ces racines vérifient la condition de réalité des surfaces : $-\infty < \lambda < a$

Substituons à λ une suite de valeurs, et cherchons le signe correspondant que prend le 1er membre (f) de l'équation :

$\lambda =$	$-\infty$	$c-\varepsilon$	$c+\varepsilon$	$b-\varepsilon$	$b+\varepsilon$	$a-\varepsilon$	$a+\varepsilon$	$+\infty$
$f =$	-1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	-1
		discontinuité		discontinuité		discontinuité		

On voit que f change 3 fois de signe en passant par l'infini, quand λ passe par les valeurs, c, b, a : en effet, le terme $\frac{z^2}{c-\lambda}$ passe de $\frac{z^2}{\varepsilon}$ à $\frac{z^2}{-\varepsilon}$. Dans les 3 intervalles :

$$(-\infty, c) \qquad (c, b) \qquad (b, a)$$

f change de signe en restant finie, on a donc 3 racines réelles = $q_1\ q_2\ q_3$:

$$-\infty < q_1 < c < q_2 < b < q_3 < a,$$

qui donnent 3 surfaces réelles appartenant chacune à une des 3 familles (q_1 donne un ellipsoïde, q_2 un hyperboloïde à 1 nappe, q_3 un hyperboloïde à 2 nappes.) — Ces 3 surfaces se coupent à angle droit ; en effet, appelons $f_1\ f_2\ f_3$ le 1er membre de l'équation où l'on a substitué à λ successivement $q_1\ q_2\ q_3$; les 3 surfaces ont pour équations : $f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 0$.

En chaque point de la 1e la normale a pour cosinus directeurs :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}$$

En chaque point de la 2e la normale a pour cosinus directeurs :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

Il s'agit de prouver que ces 2 normales sont perpendiculaires ;

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0,$$

c'est à dire qu'en tous les points communs aux 2 surfaces on a :

$$\frac{x^2}{(a-q_1)(a-q_2)} + \frac{y^2}{(b-q_1)(b-q_2)} + \frac{z^2}{(c-q_1)(c-q_2)} = 0$$

Pour vérifier cette égalité, on n'a qu'à retrancher les 2 équations membre à membre.

$$f_1 - f_2 = \frac{x^2(q_1-q_2)}{(a-q_1)(a-q_2)} + \frac{y^2(q_1-q_2)}{(b-q_1)(b-q_2)} + \frac{z^2(q_1-q_2)}{(c-q_1)(c-q_2)} = 0$$

On peut diviser par : $q_1 - q_2 \gtrless 0$, et on trouve l'égalité à démontrer.

Il s'agit maintenant d'exprimer x^2, y^2, z^2 en fonction de $q_1\ q_2\ q_3$, pour obtenir les formules de transformation des coordonnées. Pour cela, il suffit de résoudre 3 équations du 1er degré en x^2, y^2, z^2, qui sont : $f_1 = 0$ $f_2 = 0$ $f_3 = 0$.

Dans l'équation générale : $f = 0$, réduisons tous les termes au même dénominateur ; le numérateur sera un polynôme du 3e degré en λ, où le coefficient de λ^3 est $+1$, et dont les racines sont $q_1\ q_2\ q_3$; on pourra donc écrire :

$$f = \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = \frac{(\lambda-q_1)(\lambda-q_2)(\lambda-q_3)}{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)}$$

Pour en tirer x^2, multiplions par $(a-\lambda)$ et faisons $\lambda = a$:

$$x^2 = \frac{(a-q_1)(a-q_2)(a-q_3)}{(b-a)(c-a)}$$

De même :

$$y^2 = \frac{(b-q_1)(b-q_2)(b-q_3)}{(a-b)(c-b)}$$

$$z^2 = \frac{(c-q_1)(c-q_2)(c-q_3)}{(a-c)(b-c)}$$

Il est aisé de s'assurer que ces expressions sont positives; donc les valeurs de x, y, z sont réelles. On a pour chacune d'elles un double signe: on peut combiner ces signes de 8 manières différentes, ce qui donne 8 points différents, semblablement placés dans les 8 trièdres des axes, pour un seul système de coordonnées $q_1\ q_2\ q_3$.

Prenons les dérivées logarithmiques des expressions de $x^2\ y^2\ z^2$:

$$\frac{2dx}{x} = \frac{dq_1}{q_1-a} + \frac{dq_2}{q_2-a} + \frac{dq_3}{q_3-a}$$

$$\frac{2dy}{y} = \frac{dq_1}{q_1-b} + \frac{dq_2}{q_2-b} + \frac{dq_3}{q_3-b}$$

$$\frac{2dz}{z} = \frac{dq_1}{q_1-c} + \frac{dq_2}{q_2-c} + \frac{dq_3}{q_3-c}$$

d'où l'on tire dx, dy, dz; et, en faisant la somme des carrés:

$$4ds^2 = M_1 dq_1^2 + M_2 dq_2^2 + M_3 dq_3^2$$ en posant

$$M_1 = \frac{x^2}{(q_1-a)^2} + \frac{y^2}{(q_1-b)^2} + \frac{z^2}{(q_1-c)^2} = \varphi(q_1) \qquad M_2 = \varphi(q_2) \qquad M_3 = \varphi(q_3)$$

Dans ces carrés, les doubles produits ont des coefficients nuls, parce que les 3 surfaces sont orthogonales. En effet, les 3 surfaces: $q_1 =$ const. $q_2 =$ const. $q_3 =$ const. se coupent suivant 3 courbes: C_1 où q_1 seul varie; C_2 où q_2 seul varie; C_3 où q_3 seul varie. Puisque les 3 surfaces sont orthogonales, ces 3 courbes sont normales entre elles en leur point d'intersection;

leurs tangentes forment un trièdre trirectangle. On a donc (cosinus nuls) : $\frac{\partial x}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2} = 0$ pour $C_1 C_2$, et 2 autres relations analogues pour $C_2 C_3$, $C_1 C_3$. Or :

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{x}{q_1 - a} \qquad \frac{\partial x}{\partial q_2} = \frac{x}{q_2 - a}$$

et de même $\frac{\partial y}{\partial q_1}$ $\frac{\partial y}{\partial q_2}$, $\frac{\partial z}{\partial q_1}$ $\frac{\partial z}{\partial q_2}$.

On voit que les coefficients des termes rectangles dans la somme des carrés de dx, dy, dz, sont nuls.

Pour calculer M_1, prenons la dérivée de f par rapport à λ, en isolant le facteur $\lambda - q_1$, puis faisons $\lambda = q_1$ pour l'annuler :

$$\frac{x^2}{(a-\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c-\lambda)^2} = \frac{(\lambda - q_2)(\lambda - q_3)}{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)} + (\lambda - q_1)\frac{d}{d\lambda}\Big[\qquad\Big]$$

$$M_1 = \frac{(q_1 - q_2)(q_1 - q_3)}{(a-q_1)(b-q_1)(c-q_1)} = \frac{(q_1 - q_2)(q_1 - q_3)}{\psi(q_1)}$$

$\psi(\lambda)$ étant un polynôme du 3e degré en λ. De même :

$$M_2 = \frac{(q_2 - q_1)(q_2 - q_3)}{\psi(q_2)} \qquad M_3 = \frac{(q_3 - q_1)(q_3 - q_2)}{\psi(q_3)}$$

L'expression de ds^2 s'interprète alors aisément : considérons les 3 courbes C_1 C_2 C_3, et leurs arcs élémentaires ds_1 ds_2 ds_3 : on trouve, en faisant varier seulement q_1 $(dq_2 = dq_3 = 0)$:

$$4ds_1^2 = M_1 dq_1^2 \qquad \text{d'où :} \quad ds_1 = \frac{1}{2}\sqrt{M_1}\, dq_1$$

De même : $ds_2 = \frac{1}{2}\sqrt{M_2}\, dq_2$ $\qquad ds_3 = \frac{1}{2}\sqrt{M_3}\, dq_3$

et par conséquent : $\qquad ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2$

comme on pouvait s'y attendre, les 3 courbes étant orthogonales,

ds est la diagonale du parallélépipède rectangle formé par les arcs élémentaires ds_1, ds_2, ds_3.

Décomposons la force donnée F en 3 composantes tangentes aux courbes $C_1\ C_2\ C_3$, en prenant pour sens positif le sens où croissent respectivement $q_1\ q_2\ q_3$ sur chacune d'elles; soient $F_1\ F_2\ F_3$. Pour avoir Q_1, on fera varier q_1 de dq_1, c.à.d. qu'on déplacera le pt $M\,(xyz)$ sur la courbe C_1 de ds_1 : le travail élémentaire de F sera : $Q_1\,dq_1 = F_1\,ds_1$ Donc $Q_1 = \frac{F_1}{2}\sqrt{M_1}$.

De même : $Q_2 = \frac{F_2}{2}\sqrt{M_2}$ $Q_3 = \frac{F_3}{2}\sqrt{M_3}$. D'autre part

$$T = \frac{m}{2}\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{m}{8}\left(M_1 q_1'^2 + M_2 q_2'^2 + M_3 q_3'^2\right)$$

Les équations de Lagrange seront donc de la forme :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{4} M_1 q_1'\right] - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{F_1}{2}\sqrt{M_1}$$

Ces équations ne servent pas sous cette forme aux calculs; mais on peut les transformer pour la pratique.

Les mêmes résultats s'appliquent évidemment aux coordonnées elliptiques dans le plan; l'équation des coniques homofocales est :

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} - 1 = 0$$

Supposons par exemple $a > b$; si $\lambda < b$, on a une ellipse; si $b < \lambda < a$, on a une hyperbole; si enfin $\lambda > a$, on a une ellipse imaginaire. En chaque point réel (x, y) passent une ellipse et une hyperbole; car à chaque système de valeurs de x, y correspondent 2 racines réelles de λ, soit $q_1\ q_2$, qui donnent 2 courbes réelles

de familles différentes ; ces courbes sont d'ailleurs orthogonales.

$$f = \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} - 1 = \frac{-(\lambda - q_1)(\lambda - q_2)}{(a-\lambda)(b-\lambda)}$$ d'où on tire :

$$x^2 = -\frac{(a-q_1)(a-q_2)}{(b-a)} \qquad y^2 = -\frac{(b-q_1)(b-q_2)}{a-b}$$

Les valeurs de x, y sont réelles. On en tire leurs différentielles :

$$\frac{2dx}{x} = \frac{dq_1}{q_1 - a} + \frac{dq_2}{q_2 - a} \qquad \frac{2dy}{y} = \frac{dq_1}{q_1 - b} + \frac{dq_2}{q_2 - b}$$

$$4ds^2 = N_1 dq_1^2 + N_2 dq_2^2 \qquad N_1 = \frac{x^2}{(q_1-a)^2} + \frac{y^2}{(q_1-b)^2}$$

$$N_1 = \frac{q_2 - q_1}{(a-q_1)(b-q_1)} \qquad N_2 = \frac{q_1 - q_2}{(a-q_2)(b-q_2)}$$

On trouve pour les arcs élémentaires des 2 courbes $C_1 C_2$:

$$ds_1 = \frac{1}{2}\sqrt{N_1}\, dq_1 \qquad ds_2 = \frac{1}{2}\sqrt{N_2}\, dq_2$$

Si l'on décompose F en $F_1 F_2$ tangentes aux courbes $C_1 C_2$:

$$Q_1 = \frac{F_1}{2}\sqrt{N_1} \qquad Q_2 = \frac{F_2}{2}\sqrt{N_2}$$

et l'on forme les équations de Lagrange comme précédemment, en prenant :

$$T = \frac{m}{8}\left(N_1 q_1'^2 + N_2 q_2'^2\right)$$

Quand il y a une fonction des forces $V(x, y, z) = V(q_1 q_2 q_3)$ les équations de Lagrange deviennent :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{\partial V}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= \frac{\partial V}{\partial q_2} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_3'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_3} &= \frac{\partial V}{\partial q_3} \end{aligned}\right.$$

On peut dans ce cas particulier écrire l'intégrale des forces vives :

$$\frac{mv^2}{2} = V + h$$

C'est une intégrale première des équations de Lagrange, puisque celles-ci ne sont que les équations du mouvement transformées ; on peut donc, dans la pratique, remplacer l'une des équations par l'intégrale des forces vives : v^2 devra être alors exprimée en fonction de $q_1\, q_2\, q_3$. On aura ainsi la fonction T, et l'équation prendra la forme :

$$T = U + h$$

équation du 1er ordre en $q_1\, q_2\, q_3$, contenant une constante h (constante des forces vives.)

On peut retrouver directement cette équation des forces vives en combinant les équations de Lagrange. Supposons, pour simplifier, que x, y, z ne contiennent pas explicitement le temps :

$$x = \varphi(q_1 q_2 q_3) \qquad y = \psi(q_1 q_2 q_3) \qquad z = \varpi(q_1 q_2 q_3)$$

T sera alors une fonction homogène du 2e degré en $q'_1\, q'_2\, q'_3$, car : $x' = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} q'_3$ De même y', z'.

Remarquons d'autre part qu'on a, en vertu du théorème des fonctions homogènes : $q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + q'_3 \frac{\partial T}{\partial q'_3} = 2T$

Multiplions les 3 équations de Lagrange respectivement par $q'_1\, q'_2\, q'_3$.

La 1e devient : $q'_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} q'_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} q'_1$

ou $$\frac{d}{dt}\left[q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1}\right] - \frac{\partial T}{\partial q'_1} q''_1 - \frac{\partial T}{\partial q_1} q'_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} q'_1$$

Ayant fait subir la même transformation aux 2 autres, ajoutons-les :

$$\frac{d}{dt} \Sigma\, q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q'_1} q''_1 - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_1} q'_1 = \Sigma \frac{\partial U}{\partial q_1} q'_1 \qquad \text{ou}$$

$$\frac{d}{dt}(2T) - \frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt} \qquad \frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt} \qquad T = U + h.$$

Ainsi l'intégrale des forces vives est bien une intégrale première des équations de Lagrange.

– Revenons au cas général, où x, y, z contiennent le temps explicitement ; on a le groupe des 6 équations :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_3} = Q_3$$

$$q'_1 = \frac{dq_1}{dt} \qquad q'_2 = \frac{dq_2}{dt} \qquad q'_3 = \frac{dq_3}{dt}$$

Nous allons mettre les équations du mouvement sous la forme canonique trouvée par Hamilton, au moyen de la transformation suivante, due à Poisson. Au lieu des inconnues auxiliaires $q'_1\ q'_2\ q'_3$, on prend pour nouvelles fonctions inconnues :

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_1} \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q'_2} \qquad p_3 = \frac{\partial T}{\partial q'_3}$$

de sorte que les équations de Lagrange constituent un système de 6 équations entre les 6 inconnues: $q_1\, q_2\, q_3\, ;\ p_1\, p_2\, p_3$.

Dans chaque cas particulier, on pourrait prendre les 3 équations qui donnent $p_1\ p_2\ p_3$ en fonctions linéaires de $q'_1\ q'_2\ q'_3$, puisque T est du 2e degré en $q'_1\ q'_2\ q'_3$; on en tirerait $q'_1\ q'_2\ q'_3$ en fonctions linéaires de $p_1\ p_2\ p_3$, et on porterait ces expressions, où figureraient aussi $q_1\ q_2\ q_3\ t$, dans les équations de Lagrange. – Mais on peut faire la transformation une fois pour toutes et ramener les équations à une forme générale. $q'_1 = f_1(q_1\, q_2\, q_3\ p_1\, p_2\, p_3\ t)$

Pour cela, il s'agit de transformer la fonction T : elle contient

$q_1\, q_2\, q_3, q'_1\, q'_2\, q'_3, t$; elle ne devra plus dépendre que de : $q_1\, q_2\, q_3, p_1\, p_2\, p_3, t$. Or si nous donnons aux 6 nouvelles variables (le temps étant exclu) des accroissements indépendants :

$\delta q_1 \quad \delta q_2 \quad \delta q_3 \quad \delta p_1 \quad \delta p_2 \quad \delta p_3$, à ces variations correspondront des variations de $q'_1\, q'_2\, q'_3$ données par les relations :

$$\delta q'_1 = \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial f_1}{\partial q_3}\delta q_3 + \frac{\partial f_1}{\partial p_1}\delta p_1 + \frac{\partial f_1}{\partial p_2}\delta p_2 + \frac{\partial f_1}{\partial p_3}\delta p_3$$

De même $\delta q'_2$, $\delta q'_3$. La variation correspondante de T sera :

$$\delta T = \left[\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial T}{\partial q_3}\delta q_3\right] + \left[\frac{\partial T}{\partial q'_1}\delta q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2}\delta q'_2 + \frac{\partial T}{\partial q'_3}\delta q'_3\right]$$

Le 2e crochet est identique à : $p_1\,\delta q'_1 + p_2\,\delta q'_2 + p_3\,\delta q'_3 =$

$$= \delta(p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + p_3 q'_3) - (q'_1\,\delta p_1 + q'_2\,\delta p_2 + q'_3\,\delta p_3)$$

Posons : $p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + p_3 q'_3 - T = K$;

$$\delta K = -\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 - \frac{\partial T}{\partial q_3}\delta q_3 + q'_1\,\delta p_1 + q'_2\,\delta p_2 + q'_3\,\delta p_3$$

Or cette fonction K pourra être exprimée en $(q_1\, q_2\, q_3\, p_1\, p_2\, p_3\, t)$ quand on aura remplacé partout $q'_1\, q'_2\, q'_3$ par leurs expressions. La variation totale de K sera liée aux variations des variables indépendantes par la relation :

$$\delta K = \frac{\partial K}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial K}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial K}{\partial q_3}\delta q_3 + \frac{\partial K}{\partial p_1}\delta p_1 + \frac{\partial K}{\partial p_2}\delta p_2 + \frac{\partial K}{\partial p_3}\delta p_3$$

Les 2 expressions de δK doivent être identiques, car les accroissements $\delta q_1\, \delta q_2\, \delta q_3, \delta p_1\, \delta p_2\, \delta p_3$ sont arbitraires et indépendants ; donc les coefficients correspondants sont identiques (on le prouverait en annulant les 5 autres).

$$\frac{\partial K}{\partial q_1} = -\frac{\partial T}{\partial q_1} \quad \frac{\partial K}{\partial q_2} = -\frac{\partial T}{\partial q_2} \quad \frac{\partial K}{\partial q_3} = -\frac{\partial T}{\partial q_3} \quad \frac{\partial K}{\partial p_1} = q'_1 \quad \frac{\partial K}{\partial p_2} = q'_2 \quad \frac{\partial K}{\partial p_3} = q'_3 .$$

Il faut remarquer que dans les 3 premières identités, $\frac{\partial T}{\partial q}$ est la dérivée partielle de T fonction de $(q_1 q_2 q_3 q'_1 q'_2 q'_3)$ tandis que $\frac{\partial K}{\partial q}$ est la dérivée partielle de K fonction de $(q_1 q_2 q_3 p_1 p_2 p_3)$ –

Les équations du mouvement deviennent, quand on y porte ces expressions :

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_1} = Q_1 \qquad \frac{dp_2}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_2} = Q_2 \qquad \frac{dp_3}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_3} = Q_3$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_1} \qquad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_2} \qquad \frac{dq_3}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_3}$$

Les égalités : $q'_1 = \frac{\partial K}{\partial p_1}$ $\quad q'_2 = \frac{\partial K}{\partial p_2}$ $\quad q'_3 = \frac{\partial K}{\partial p_3}$

donnent les valeurs de q'_1, q'_2, q'_3 telles qu'on les tirerait des équations du 1er degré en $p_1\, p_2\, p_3$. – Pour obtenir les équations canoniques, il suffit de former la fonction K telle qu'on l'a définie et d'y remplacer $q'_1\, q'_2\, q'_3$ par leurs expressions en $p_1\, p_2\, p_3$. On a ainsi 6 équations du 1er ordre, définissant les 6 variables $q_1\, q_2\, q_3\, p_1\, p_2\, p_3$ en fonction du temps. Les intégrales contiendront 6 constantes arbitraires. On devra chercher à tirer les valeurs de $q_1\, q_2\, q_3$, car ce sont celles qu'il importe de connaître puisqu'elles déterminent le mouvement.

On n'emploie guère les équations canoniques que dans les cas où il existe une fonction des forces ou tout au moins une fonction $U\,(x\,y\,z\,t)$ comme il a été dit plus haut (page 127) Alors les équations du mouvement se simplifient, car on peut remplacer les 2 fonctions K et U par une seule. Faisons : $Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}$ dans la 1e équation :

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

Posons : $K - U = H$ Comme U ne contient pas $p_1\, p_2\, p_3$:

$$\frac{\partial K}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \qquad \frac{\partial K}{\partial q_1} - \frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial q_1}$$

Les 6 équations canoniques deviennent :

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \qquad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} \qquad \frac{dq_3}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_3}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} \qquad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_3}$$

Telle est la forme définitive, et la plus usitée, des équations de Hamilton dans le cas d'une fonction des forces ; elles sont faciles à retenir et à écrire à cause de leur symétrie. Il suffit de former la fonction : $H = K - U = (p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + p_3 q'_3 - T) - U$ où $q'_1\, q'_2\, q'_3$ sont exprimés en fonction de $p_1\, p_2\, p_3$.

On a déjà vu que quand $x\, y\, z$ ne contiennent pas explicitement le temps, T est fonction homogène du 2e degré en $q'_1\, q'_2\, q'_3$. On sait qu'alors : $p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + p_3 q'_3 = 2T$

Donc : $H = K - U = T - U \qquad K = T$

Dans ce dernier cas, l'équation des forces vives : $T = U + h$ prend une forme très simple : $H = h = \text{const.}$

C'est une intégrale première des équations du mouvement. On doit pouvoir la déduire des 6 équations canoniques ; c'est ce que nous allons faire.

H est en général fonction de $(q_1\, q_2\, q_3\, p_1\, p_2\, p_3\, t)$ mais dans le cas particulier présent, le temps n'y figure pas ; $q_1\, q_2\, q_3\, p_1\, p_2\, p_3$ sont d'ailleurs les fonctions du temps définies par les équations canoniques.

Puisque H est fonction médiate de t, on devra écrire :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{dp_3}{dt}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial H}{\partial q_3}\frac{\partial H}{\partial p_3} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial H}{\partial q_3}$$

D'où, en intégrant : $H = h$ = const. (intégrale des forces vives)

Cette intégrale première peut donc remplacer une des 6 équations canoniques : c'est une équation finie entre $q_1\, q_2\, q_3\, p_1\, p_2\, p_3$, avec une constante h. On pourra en tirer une de ces 6 quantités et la porter dans les autres équations ; on n'aura plus à intégrer qu'un système de 5 équations du 1er ordre à 5 inconnues, qui donnera 5 autres constantes.

Dans le cas général où H contient explicitement le temps (c.à.d. où les coordonnées $q_1\, q_2\, q_3$ sont mobiles) on aurait, par un calcul semblable au précédent : $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

La dérivée totale de H par rapport au temps se réduit dans tous les cas à sa dérivée partielle. Mais quand cette dérivée partielle n'est pas nulle, il n'y a pas d'intégrale première.

— Appliquons ces formules au cas le plus simple, celui des coordonnées cartésiennes : pour $q_1\, q_2\, q_3$ prenons $x\, y\, z$. Supposons qu'il y ait une fonction de forces : $U(x, y, z)$

On a d'abord : $T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = K$ Posons :

$p_1 = \frac{\partial T}{\partial x'} = mx'$ $\quad p_2 = my'$ $\quad p_3 = mz'$ d'où :

$x' = \frac{p_1}{m}$ $\quad y' = \frac{p_2}{m}$ $\quad z' = \frac{p_3}{m}$

K est identique à T, parce que T est homogène en $q'_1\, q'_2\, q'_3\, (x'\, y'\, z')$.

$$T = \frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2) \qquad H = \frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2) - U$$

Écrivons les équations canoniques :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{p_2}{m} \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{p_3}{m}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad \frac{dp_3}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Ces équations donnent : $p_1 = mx'$ $\quad p_2 = my'$ $\quad p_3 = mz'$ ce que l'on savait déjà, et par suite :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

équations ordinaires du mouvement dans le cas d'une fonction de forces. Écrivons l'intégrale première des forces vives :

$$\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2) - U = h \quad \text{ou :} \quad \frac{m}{2}(x'^2+y'^2+z'^2) = U(x,y,z) + h$$

— Appliquons maintenant les formules aux coordonnées polaires dans le plan : pour $q_1\ q_2$ nous prendrons r, θ ; il n'y aura ni q_3 ni p_3. Supposons, pour préciser, le mobile attiré par l'origine en raison inverse du carré de la distance :

$F = -\frac{m\mu}{r^2}$ Fonction des forces : $U = \int F\,dr = \frac{m\mu}{r}$

Faisons $m = 1$, ce qui n'enlève rien à la généralité des calculs, car on pourrait le mettre en facteur dans U et le supprimer partout.

$U = \frac{\mu}{r}$ $\qquad T = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2)$ $\qquad$ Écrivons les ~~le équations~~ inconnues auxiliaires :

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = r' \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = r^2\theta' \qquad r' = p_1 \qquad \theta' = \frac{p_2}{r^2}.$$

$T = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2}\right) = K$ $\qquad$ puisque T est homogène en r', θ'.

$$H = T - U = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r}$$

Les équations canoniques sont :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1} = p_1 \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2} = \frac{p_2}{r^2}$$

d'où : $r' = p_1 \quad r^2\theta' = p_2$ résultat attendu.

D'autre part :

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{p_2^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} \qquad \frac{dp_2}{dt} = 0$$

Nous pouvons remplacer une de ces équations par l'intégrale des forces vives : $H = h$, ou : $\frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2}\right) = \frac{\mu}{r} + h$.

L'équation : $\frac{dp_2}{dt} = 0$ donne immédiatement :

$p_2 = r^2\theta' = C$ intégrale des aires. L'équation :

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{p_2^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} \quad \text{donne :} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{C^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} = F + \frac{C^2}{r^3}$$

formule du mouvement relatif du mobile sur son rayon vecteur.

Enfin l'intégrale des forces vives donne : $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}\right] = \frac{\mu}{r} + h$

c'est la formule qui sert à déterminer le temps.

